

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Gustavo Corrêa Martins

**MODELAGENS ACÚSTICAS INCLUINDO EFEITOS  
VISCOTÉRMICOS COM VISTAS À APLICAÇÃO EM  
ALTO-FALANTES DE APARELHOS AUDITIVOS**

Florianópolis

2011



Gustavo Corrêa Martins

**MODELAGENS ACÚSTICAS INCLUINDO EFEITOS  
VISCOTÉRMICOS COM VISTAS À APLICAÇÃO EM  
ALTO-FALANTES DE APARELHOS AUDITIVOS**

Dissertação submetida ao Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia Me-  
cânica para a obtenção do Grau de  
Mestre em Engenharia Mecânica.  
Orientador: Prof. Júlio Apolinário Cor-  
dioli, Dr.Eng.  
Coorientador: Prof. Roberto Jordan,  
Dr.Eng.

Florianópolis

2011

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária  
da  
Universidade Federal de Santa Catarina

M386m Martins, Gustavo Corrêa

Modelagens acústicas incluindo efeitos viscotérmicos com vistas à aplicação em alto-falantes de aparelhos auditivos [dissertação] / Gustavo Corrêa Martins ; orientador, Júlio Apolinário Cordioli. - Florianópolis, SC, 2011.

115 p.: il., grafs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia mecânica. 2. Calor - Transmissão. 3. Elementos finitos. I. Cordioli, Júlio Apolinário. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU 621

Gustavo Corrêa Martins

**MODELAGENS ACÚSTICAS INCLUINDO EFEITOS  
VISCOTÉRMICOS COM VISTAS À APLICAÇÃO EM  
ALTO-FALANTES DE APARELHOS AUDITIVOS**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Mecânica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 18 de janeiro de 2011.

---

Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr.Sc.  
Coordenador do Curso

---

Prof. Júlio Apolinário Cordioli, Dr.Eng.  
Orientador

---

Prof. Roberto Jordan, Dr.Eng.  
Coorientador

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr.Sc.  
Presidente

---

Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.

---

Prof. César José Deschamps, Ph.D.



Este trabalho é dedicado a minha família,  
especialmente à minha esposa Giselle e  
aos meus pais Lauro e Sônia.





## AGRADECIMENTOS

À minha esposa Giselle pelo amor, carinho, compreensão e companheirismo durante toda a minha vida acadêmica. Aos meus pais Sônia e Lauro que sempre me deram bons exemplos e sempre me incentivaram e apoiaram na busca de meus objetivos. À minha avó, Maria, que é um exemplo de coragem e superação, e sempre me mostrou que nunca é tarde para começar a aprender algo novo. Às minhas irmãs Renata, Marcela e Carla pela amizade, respeito e companheirismo. Ao meu sogro e minha sogra, Jorge e Verônica, pelo apoio e confiança durante o período deste trabalho.

Aos Professores Júlio Apolinário Cordioli e Roberto Jordan pela orientação, atenção, confiança e amizade durante esta longa jornada.

Aos Professores Arcanjo Lenzi, César José Deschamps, Eduardo Alberto Fancello, pelas críticas e sugestões feitas a este trabalho.

Aos colegas do LVA: Diogo, Douglas, Eric, Giovanni, Myrria, Ilka, Israel, Jesus, Júlio Alexandre (Garrincha), Júlio Hermes, Leonardo (Gringo), Marcelo Portela, Mario, Olavo, Pablo, Paulo Mareze, Raquel, Mikio, Stephan, William e Zargos, pelo companheirismo e ajuda sempre que precisei.

À Acústica Amplivox Ltda e à CAPES pelo apoio financeiro.



## RESUMO

O desenvolvimento de equipamentos miniaturizados, como celulares e aparelhos auditivos, torna-se cada dia mais comuns. Porém, a análise acústica destes sistemas apresenta complexidades adicionais e que limitam o uso dos modelos acústicos clássicos existentes. Estas dificuldades são originadas pelas pequenas cavidades internas existentes nestes sistemas onde os fenômenos de atrito viscoso e condutividade térmica influem na resposta acústica. Estes fenômenos são chamados na literatura de efeitos viscotérmicos e são negligenciados nos modelos acústicos clássicos. O objetivo deste trabalho é construir, avaliar e validar modelos acústicos viscotérmicos. A inclusão de efeitos viscotérmicos na modelagem acústica eleva a complexidade para solução analítica do problema que é possível apenas em geometrias e condições específicas. A solução para geometrias e condições mais complexas só é possível de forma numérica e este tipo de abordagem inexistente nos códigos comerciais de análise numérica mais difundidos. Neste trabalho, foram implementados dois tipos de modelos acústicos viscotérmicos pelo método de Elementos Finitos: o modelo Low Reduced Frequency (LRF) e o modelo Navier-Stokes-Fourier linearizado (NSFL). A implementação foi feita através da formulação fraca (weak form) aplicada no código comercial Comsol 3.5a. O modelo NSFL foi implementado com duas formulações diferentes para comparação. Os modelos LRF e NSFL foram aplicados em duas geometrias diferentes onde os resultados foram comparados com dados experimentais. O modelo NSFL possui maior robustez para análise de geometrias arbitrárias, porém o custo computacional de sua solução é alto. Este problema deu origem a um estudo da discretização mínima necessária para a uma solução adequada dos modelos NSFL. A comparação dos resultados obtidos pelos modelos viscotérmicos com dados experimentais apresentou discrepâncias que foram analisadas com mais critério com a análise das condições de contorno do modelo. Finalmente, um modelo de radiação acústica foi implementado com utilização do método Perfectly Matched Layer (PML) e acoplado com os modelos viscotérmicos para as análises da impedância de radiação e do efeito do erro de posição dos sensores. Com o ajuste da posição dos sensores nos modelos viscotérmicos os resultados obtidos apresentaram uma concordância muito boa com os dados experimentais.

**Palavras-chave:** efeitos viscotérmicos, elementos finitos, LRF, PML



## ABSTRACT

The development of miniaturized devices such as mobile phones and hearing aids is becoming increasingly common. However, the acoustic analysis of these systems presents additional complexities which limit the use of standard acoustic models. These difficulties are due to small dimensions of acoustic waveguides within these systems, where the phenomena of viscous friction and thermal conductivity affect the acoustic propagation. These phenomena are called in literature by acoustic viscothermal effects and are neglected in standard acoustic models. The objective of this work is to construct, evaluate and validate viscothermal acoustic models. The inclusion of viscothermal effects in acoustic models adds complexity, and the analytical solution of the problem is only possible in simple cases. The solution of more complex geometries and boundary conditions requires the use of numerical techniques, and this type of approach is still absent in vibro-acoustic commercial codes. In this work, two types of viscothermal acoustic models are solved by means of the Finite Element (FE) Method: the Low Reduced Frequency (LRF) model and the linearized Navier-Stokes-Fourier (LNSF) model. The implementation was done through the weak formulation of the problem through the commercial code Comsol 3.5a. The LNSF model was implemented with two different formulations: irreducible formulation and mixed formulation. The LRF and LNSF models were applied to two different geometries, and the results were compared with experimental data. It is shown that the LNSF model allows the analysis of arbitrary geometries, but the computational cost of its solution can be considerably high. This problem has led to a study of minimum discretization of the FE mesh needed for a proper solution of the LNSF models. Some discrepancies observed between viscothermal acoustic models and experimental data also led to a more detailed analysis of the boundary conditions applied to the models. Therefore, an acoustic radiation model was implemented using Perfectly Matched Layer (PML), which was coupled to the viscothermal acoustic models. The analysis showed that numerical results were highly sensitive to sensor position, while radiation impedance was less affected by the viscothermal phenomena. Finally, the adjustment of sensor positions in viscothermal acoustic models led to a very good agreement between numerical and experimental data.

**Keywords:** viscothermal effects, FEM, Low Reduced Frequency, PML



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Componentes do aparelho auditivo do tipo retro auricular. ....	1
Figura 1.2 Fluxograma de funcionamento do aparelho auditivo. .	2
Figura 1.3 Vista em corte de um modelo de alto-falante para aparelhos auditivos. ....	3
Figura 2.1 Sistema de coordenadas cilíndricas. ....	12
Figura 2.2 Magnitude da função $A(s, \hat{r})$ para tubos cilíndricos. .	18
Figura 4.1 Montagem do aparato experimental. ....	32
Figura 4.2 Dimensões (em milímetros) das ponteiros utilizadas nos experimentos. ....	33
Figura 4.3 Posição das ponteiros em relação ao tubo analisado. .	33
Figura 4.4 Curvas da função coerência entre os sinais medidos na $H(f)$ . ....	35
Figura 4.5 Posicionamento das ponteiros para calibração. ....	36
Figura 4.6 Curvas de amplitude e fase da $H(f)$ de calibração das ponteiros. ....	36
Figura 4.7 Geometria do tubo simples (dimensões em milímetros). .	37
Figura 4.8 Condições de contorno aplicadas ao tubo simples. ....	38
Figura 4.9 Condições de contorno dos modelos NSFL aplicadas ao tubo simples. ....	40
Figura 4.10 Malha 2D do tubo simples para a solução dos modelos NSFL. ....	41
Figura 4.11 Magnitude de $H(f)$ para o tubo simples calculada com o modelo numérico NSFL com formulação irreduzível. ....	43
Figura 4.12 Magnitude de $H(f)$ para o tubo simples calculada com o modelo numérico NSFL com formulação mista. ....	44
Figura 4.13 Distribuição da pressão acústica calculadas pelos modelos NSFL nas frequências de ressonância: a) 840 Hz, b) 1680 Hz e c) 2530 Hz. ....	45
Figura 4.14 Distribuição da magnitude de temperatura acústica calculada pelo modelo NSFL (formulação mista) na frequência de 1680 Hz. ....	45
Figura 4.15 Perfil da magnitude de velocidade de partícula axial calculados pelos modelos NSFL nas frequências de ressonância:	

a) 840 Hz, b) 1680 Hz e c) 2530 Hz. ....	46
Figura 4.16 Perfil da magnitude de temperatura acústica calculados pelos modelos NSFL nas frequências de ressonância: a) 840 Hz, b) 1680 Hz e c) 2530 Hz. ....	47
Figura 4.17 Geometria do tubo com variação de seção (dimensões em milímetros). ....	48
Figura 4.18 Condições de contorno do modelo LRF aplicadas ao tubo com variação de seção. ....	49
Figura 4.19 Condições de contorno dos modelos NSFL aplicadas ao tubo com variação de seção. ....	49
Figura 4.20 Malha 2D do tubo com variação de seção para a solução dos modelos NSFL. ....	50
Figura 4.21 Magnitude de $H(f)$ para o modelo LRF numérico. ....	51
Figura 4.22 Magnitude de $H(f)$ calculada com o modelo numérico NSFL com formulação irreduzível. ....	52
Figura 4.23 Magnitude de $H(f)$ calculada com o modelo numérico NSFL com formulação mista. ....	53
Figura 4.24 Distribuição da pressão acústica calculadas pelos modelos NSFL nas frequências de ressonância: a) 1780 Hz, b) 3080 Hz e c) 4960 Hz. ....	54
Figura 4.25 Magnitude de velocidade axial (em 3080Hz) calculada pelo modelo NSFL. ....	55
Figura 4.26 Magnitude de velocidade radial (em 3080Hz) calculada pelo modelo NSFL. ....	55
Figura 4.27 Magnitude da temperatura acústica (em 3080Hz) calculada pelo modelo NSFL. ....	56
Figura 5.1 Malhas com elementos quadrados e retangulares avaliadas. ....	58
Figura 5.2 Comparação das curvas de magnitude de $H(f)$ obtidas com as malhas da Figura 5.1. ....	58
Figura 5.3 Perfis de magnitude da velocidade de partícula axial (normalizados). ....	60
Figura 5.4 Magnitudes da velocidade de partícula axial e da temperatura acústica no tubo simples na frequência de 50Hz. ....	62
Figura 5.5 Parâmetros para discretização do tubo com a malha do tipo A. ....	63
Figura 5.6 Parâmetros para discretização do tubo com a malha do tipo B. ....	63



Figura 5.7	Malha tipo A com $t_C = \delta'_{term}/3$ .....	65
Figura 5.8	Malha tipo B com $t_C = \delta'_{term}/3$ .....	65
Figura 5.9	Funções $\epsilon_p$ calculadas para diferentes malhas do tipo A.....	66
Figura 5.10	Funções $\epsilon_p$ calculadas para diferentes malhas do tipo B.....	67
Figura 5.11	Funções $\epsilon_{\bar{\tau}}$ calculadas para diferentes malhas do tipo A.....	68
Figura 5.12	Funções $\epsilon_{\bar{\tau}}$ calculadas para diferentes malhas do tipo B.....	68
Figura 5.13	Funções $\epsilon_{\bar{u}}$ calculadas para diferentes malhas do tipo A.....	69
Figura 5.14	Funções $\epsilon_{\bar{u}}$ calculadas para diferentes malhas do tipo B.....	69
Figura 5.15	Exemplo de malha para análise da discretização na direção de propagação da onda ( $l_E = L/30$ ).....	70
Figura 5.16	Funções $\epsilon_p$ calculadas para diferentes quantidades de elementos na direção axial.....	71
Figura 5.17	Funções $\epsilon_{\bar{\tau}}$ calculadas para diferentes quantidades de elementos na direção axial.....	72
Figura 5.18	Funções $\epsilon_{\bar{u}}$ calculadas para diferentes quantidades de elementos na direção axial.....	72
Figura 5.19	Parâmetros para avaliação das malhas 3D.....	74
Figura 5.20	Discretização tridimensional do tubo simples com plano $XZ$ de simetria.....	74
Figura 5.21	Funções $\epsilon_p$ calculadas com malhas 3D e diferentes discretizações na camada limite.....	75
Figura 5.22	Funções $\epsilon_{\bar{\tau}}$ calculadas com malhas 3D e diferentes discretizações na camada limite.....	75
Figura 5.23	Funções $\epsilon_{\bar{u}}$ calculadas com malhas 3D e diferentes discretizações na camada limite.....	76
Figura 6.1	Posição do flange no tubo.....	78
Figura 6.2	Magnitude de $H(f)$ para o tubo simples flangeado....	79
Figura 6.3	Magnitude de $H(f)$ para o tubo flangeado com variação de seção.....	80
Figura 6.4	Exemplo de a) um domínio sem restrições e b) um domínio computacional limitado para problemas acústicos externos.	80

Figura 6.5	Topologia de um elemento infinito.....	81
Figura 6.6	Topologia de uma camada absorvente.....	82
Figura 6.7	Configuração dos modelos acústicos bidimensionais dos tubos flangeados.....	83
Figura 6.8	Configuração para aplicação do modelo acústico clássico com radiação acústica.....	84
Figura 6.9	Magnitude de $H(f)$ para o tubo simples calculadas com o modelo acústico clássico com radiação acústica.....	85
Figura 6.10	Magnitude de $H(f)$ para o tubo com variação de seção calculadas com o modelo acústico clássico com radiação acústica.....	85
Figura 6.11	Configuração para aplicação do modelo LRF com radiação acústica.....	86
Figura 6.12	Magnitude de $H(f)$ para o tubo simples calculadas com o modelo LRF com radiação acústica.....	87
Figura 6.13	Magnitude de $H(f)$ para o tubo com variação de seção calculadas com o modelo LRF com radiação acústica.....	87
Figura 6.14	Configurações para aplicação do modelo NSFL com radiação acústica.....	88
Figura 6.15	Magnitude de $H(f)$ para o tubo simples calculadas com o modelo NSFL com radiação acústica.....	90
Figura 6.16	Magnitude de $H(f)$ para o tubo com variação de seção calculadas com o modelo NSFL com radiação acústica.....	91
Figura 6.17	Parte real da impedância na saída do tubo.....	91
Figura 6.18	Parte imaginária da impedância na saída do tubo....	92
Figura 6.19	Exemplo de erros de posição dos sensores nas análises experimentais.....	93
Figura 6.20	Parâmetros para avaliação de $H(f)$ .....	94
Figura 6.21	Exemplo de configuração dos domínios para aplicação dos modelos acústicos viscotérmicos: a)LRF e b)NSFL.....	95
Figura 6.22	Magnitude de $H(f)$ calculadas em diferentes posições para o ponto 1 com o modelo LRF.....	96
Figura 6.23	Magnitude de $H(f)$ calculadas em diferentes posições para o ponto 1 com o modelo NSFL.....	97
Figura 6.24	Magnitude de $H(f)$ calculadas em diferentes posições para o ponto 2 com o modelo LRF.....	97
Figura 6.25	Magnitude de $H(f)$ calculadas em diferentes posições para o ponto 2 com o modelo NSFL.....	98

Figura 6.26 Magnitude de $H(f)$ calculadas pelos modelos LRF e NSFL do tubo com variação de seção utilizando os parâmetros $L1 = L2 = 2,5$ mm.....	99
Figura 6.27 Magnitude de $H(f)$ calculadas pelos modelos LRF e NSFL do tubo simples utilizando os parâmetros $L1 = 2,5$ mm e $L2 = 1$ mm.....	100



## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 4.1 Propriedades do ar utilizada nos modelos. ....	32
---	----



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Alfabeto Latino

$a$	raio do tubo
$C_p$	calor específico a pressão constante
$C_v$	calor específico a volume constante
$c_0$	velocidade do som no fluido
$e_r$	vetor unitário na direção radial do sistema de coordenadas cilíndricas
$e_x$	vetor unitário na direção axial do sistema de coordenadas cilíndricas
$g_A$	condições de contorno essenciais do modelo acústico clássico
$h_A$	condições de contorno naturais do modelo acústico clássico
$i$	unidade imaginária
$\hat{k}$	frequência reduzida ( <i>reduced frequency</i> )
$k$	número de onda do modelo acústico clássico
$l$	comprimento característico
$n$	vetor normal ao contorno do domínio analisado
$P$	pressão total do fluido
$P_0$	pressão do meio
$Pr$	número de Prandtl
$\hat{p}$	amplitude adimensional da pressão acústica
$p$	amplitude da pressão acústica
$p'$	pressão acústica
$p_i^*$	i-ésima função ponderação

$p_a$	pressão acústica do modelo acústico clássico
$R$	raio do tubo
$R_0$	constante do gás
$\hat{r}$	coordenada adimensional na direção radial
$s$	número de onda de cisalhamento ( <i>shear wave number</i> )
$T$	temperatura do fluido
$T_0$	temperatura do meio
$t$	tempo
$\mathbf{U}$	vetor velocidade do fluido
$\hat{u}$	amplitude adimensional da velocidade de partícula na direção axial ( $\mathbf{e}_x$ )
$\mathbf{u}'$	vetor velocidade de partícula
$\mathbf{u}$	vetor amplitude complexa da velocidade de partícula
$u'$	velocidade de partícula na direção axial ( $\mathbf{e}_x$ )
$\hat{v}$	amplitude adimensional da velocidade de partícula na direção radial ( $\mathbf{e}_r$ )
$v'$	velocidade de partícula na direção radial ( $\mathbf{e}_r$ )
$\hat{x}$	coordenada adimensional na direção axial
$\hat{\mathbf{x}}^{cd}$	vetor de coordenadas adimensionais na direção transversal à propagação
$\hat{\mathbf{x}}^{pd}$	vetor de coordenadas adimensionais na direção de propagação
$\tilde{Z}_{rad}$	impedância de radiação
$[K^a]$	matriz de rigidez acústica
$[K_e^a]$	matriz de rigidez acústica do elemento
$[M^a(s)]$	matriz de inércia acústica do modelo LRF



$[M^a]$	matriz de inércia acústica
$[M_e^a]$	matriz de inércia acústica do elemento
$\{P\}$	vetor de pressões nodais
$\{N\}$	vetor de funções de aproximação do elemento
$\{P_e\}$	vetor de pressões acústicas em cada nó do elemento

## Alfabeto Grego

$\delta_{rs}$	delta de Kronecker
$\Phi^{(visc)}$	função dissipação viscosa de energia mecânica
$\Phi_{rs}$	tensor tensão viscosa
$\Gamma$	constante de propagação
$\gamma$	razão de calores específicos
$\kappa$	condutividade térmica do fluido
$\lambda$	coeficiente de viscosidade de dilatação
$\mu$	coeficiente de viscosidade de cisalhamento
$\hat{\rho}$	amplitude adimensional da densidade acústica
$\rho$	amplitude complexa da densidade acústica
$\rho'$	densidade acústica
$\rho_0$	densidade do meio
$\varrho$	densidade do fluido
$\sigma$	raiz quadrada do número de Prandtl
$\hat{\tau}$	amplitude adimensional da temperatura acústica
$\tau$	amplitude complexa da temperatura acústica
$\tau'$	temperatura acústica
$\Omega$	interior do domínio analisado
$\Omega_e$	interior do domínio do elemento

$\partial\Omega$	contorno do domínio analisado
$\omega$	frequência angular

### Operadores e Funções

$\Delta()$	operador laplaciano
$\frac{D()}{Dt}$	operador derivada total
$\hat{\Delta}^{pd}$	operador laplaciano adimensional para as coordenadas na direção de propagação
$\nabla \cdot ()$	operador divergente
$\nabla \times ()$	operador rotacional
$\nabla()$	operador gradiente
$H(f)$	função de transferência
$J_0()$	função de Bessel de ordem 0
$J_1()$	função de Bessel de ordem 1
$J_2()$	função de Bessel de ordem 2
$R()$	função resíduo
$S_1()$	função de Struve de ordem 1

### Abreviações e Siglas

BEM	<i>Boundary Element Method</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i>
LRF	<i>Low Reduced Frequency</i>
NSFL	Navier-Stokes-Fourier linearizado
PML	<i>Perfectly Matched Layer</i>

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 MOTIVAÇÃO	1
1.1.1 Alto-falantes de aparelhos auditivos	3
1.1.2 Efeitos viscotérmicos	4
1.1.3 Outras aplicações para os modelos acústicos visco-térmicos	5
1.2 OBJETIVO DO TRABALHO	6
<b>2 MODELOS ACÚSTICOS VISCOTÉRMICOS</b>	<b>7</b>
2.1 INTRODUÇÃO	7
2.2 MODELO NAVIER-STOKES-FOURIER LINEARIZADO	8
2.3 MODELO <i>LOW REDUCED FREQUENCY</i>	11
2.3.1 Modelo LRF para tubos cilíndricos	11
2.3.2 Modelo LRF para outras geometrias	16
<b>3 SOLUÇÃO NUMÉRICA DE MODELOS ACÚSTICOS VISCOTÉRMICOS</b>	<b>21</b>
3.1 FORMULAÇÃO FEM PARA O MODELO ACÚSTICO CLÁSSICO	22
3.2 FORMULAÇÃO FEM PARA O MODELO LRF	25
3.3 FORMULAÇÃO FEM PARA O MODELO NSFL	26
3.3.1 Formulação irreduzível	27
3.3.2 Formulação mista	29
<b>4 VALIDAÇÃO DOS MODELOS ACÚSTICOS VISCOTÉRMICOS</b>	<b>31</b>
4.1 AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL	31
4.1.1 Aparato Experimental	31
4.1.2 Procedimento experimental	34
4.1.3 Calibração das ponteiras	34
4.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO	37
4.3 TUBO SIMPLES	37
4.3.1 Modelo LRF analítico	38
4.3.2 Modelos NSFL	39
4.3.3 Resultados	42
4.4 TUBO COM VARIAÇÃO DE SEÇÃO	48
4.4.1 Modelo LRF	48
4.4.2 Modelo NSFL	49
4.4.3 Resultados	50
<b>5 DISCRETIZAÇÃO PARA OS MODELOS NSFL</b>	<b>57</b>

5.1	METODOLOGIA DE ANÁLISE .....	59
5.1.1	Espessuras de camada limite .....	60
5.2	DISCRETIZAÇÃO 2D .....	62
5.2.1	Parametrização das malhas analisadas .....	62
5.2.2	Discretização da camada limite .....	64
5.2.2.1	Malhas analisadas .....	64
5.2.2.2	Resultados .....	66
5.2.3	Discretização na direção de propagação da onda ...	70
5.2.3.1	Malhas analisadas .....	70
5.2.3.2	Resultados .....	71
5.3	DISCRETIZAÇÃO 3D .....	73
5.3.1	Malhas analisadas .....	73
5.3.2	Resultados .....	73
<b>6</b>	<b>ESTUDO DAS CONDIÇÕES DA ANÁLISE EXPERIMENTAL .....</b>	<b>77</b>
6.1	METODOLOGIA .....	77
6.1.1	Configuração experimental analisada .....	78
6.1.2	Modelo com impedância de radiação .....	78
6.1.3	Modelos acústicos em domínios externos sem restrições .....	80
6.2	ANÁLISE DA IMPEDÂNCIA DE RADIAÇÃO .....	83
6.2.1	Modelo acústico clássico .....	84
6.2.2	Modelo LRF .....	86
6.2.3	Modelos NSFL .....	88
6.3	EFEITO DA POSIÇÃO DOS SENSORES .....	93
6.3.1	Configuração dos modelos analisados .....	94
6.3.2	Análise isolada dos sensores .....	95
6.3.3	Ajuste dos modelos .....	99
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>101</b>
7.1	SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS .....	102
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>105</b>
	<b>APÊNDICE A – Desenvolvimento da formulação fraca para os modelos NSFL .....</b>	<b>111</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO

A evolução de projetos e de processos de fabricação tem possibilitado a produção em larga escala de equipamentos com dimensões reduzidas como telefones celulares, computadores portáteis e outros equipamentos. Esta tendência acompanha também os aparelhos auditivos e seus componentes, como os mostrados na Figura 1.1.

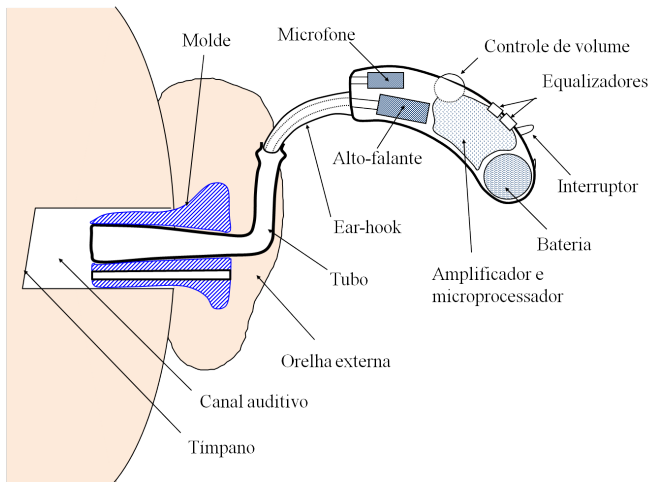


Figura 1.1: Componentes do aparelho auditivo do tipo retro auricular.

As funções de cada componente básico do aparelho auditivo são [1]:

- Microfone: transdutor que converte o sinal sonoro em sinal elétrico;
- Amplificador, microprocessador e bateria: estes componentes juntos têm a função de processamento e amplificação dos sinais elétricos, ponderando-os conforme as necessidades do usuário;
- Alto-falante: transdutor que converte o sinal elétrico no sinal sonoro que será transmitido ao usuário;

- Tubo e *ear-hook*: componentes com a função de conduzir o sinal sonoro ao canal auditivo do usuário;
- Molde: componente com a função de acoplar o aparelho à orelha externa do usuário.

Os aparelhos auditivos são projetados para amplificar o sinal sonoro nas faixas de frequência em que o usuário possui deficiência ou perda auditiva. O processo de funcionamento do aparelho auditivo pode ser visualizado no fluxograma da Figura 1.2. O processo de funcionamento inicia-se pela captação das ondas sonoras pelo microfone onde o sinal sonoro é convertido em sinal elétrico. O sinal elétrico sofre processamento e amplificação e é enviado ao alto-falante que o converte em sinal sonoro novamente. As ondas sonoras geradas pelo alto-falante ainda percorrem um sistema de tubos que as conduzem até o canal auditivo do usuário.

Para que o aparelho auditivo funcione adequadamente necessita-se de informações do comportamento dinâmico do alto-falante e do sistema acústico composto pelos tubos, canal auditivo e o tímpano. Estas informações são importantes para realização do processamento do sinal elétrico que precisa ser ponderado, considerando o comportamento dinâmico destes sistemas, para gerar um sinal sonoro adequado às necessidades do usuário.

O processamento e amplificação do sinal sonoro ainda pode ser controlado externamente pelos equalizadores e o controle de volume. A equalização é um ajuste fino do aparelho que é realizada normalmente por fonoaudiólogos para adaptação do aparelho ao usuário.

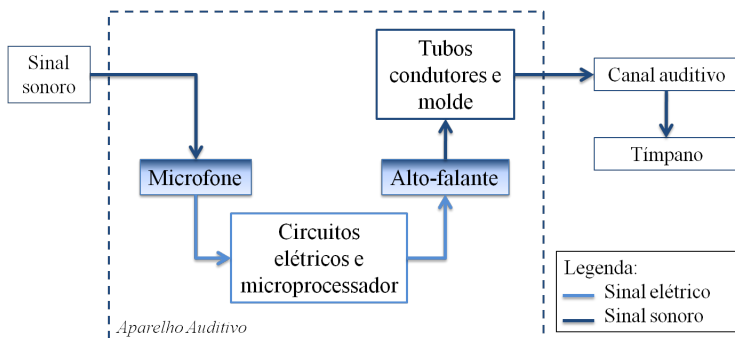


Figura 1.2: Fluxograma de funcionamento do aparelho auditivo.

### 1.1.1 Alto-falantes de aparelhos auditivos

Os alto-falantes de aparelhos auditivos são compostos de componentes miniaturizados que constituem os sistemas físicos: eletromagnético, mecânico e acústico. Os componentes básicos do alto-falante estão descritos na Figura 1.3.

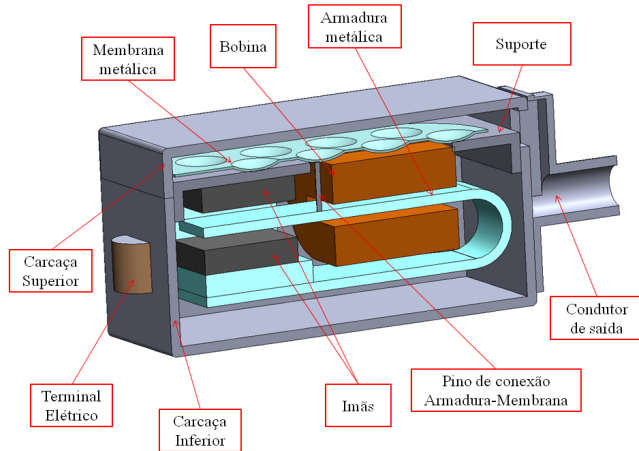


Figura 1.3: Vista em corte de um modelo de alto-falante para aparelhos auditivos.

Cada sistema físico é composto pelos seguintes componentes indicados na Figura 1.3:

- Sistema eletromagnético: armadura, bobina e os dois ímãs;
- Sistema mecânico: armadura, membrana e o pino de conexão;
- Sistema acústico: composto de duas cavidades de ar formadas pelas carcaças e separadas pelo suporte e a membrana.

O processo de funcionamento do alto-falante inicia-se pelo sistema eletromagnético que transforma o sinal elétrico aplicado aos terminais em força magnética flexionando a armadura. O deslocamento gerado pela força na armadura é transmitido para a membrana através do pino de conexão. A membrana, por sua vez, vibra e provoca perturbações no ar contido nas cavidades do sistema acústico. Estas perturbações geram ondas sonoras que deixarão o alto-falante através do condutor de saída.

Na estrutura construtiva do alto-falante os sistemas eletromagnético, mecânico e acústico encontram-se fortemente acoplados. O acoplamento forte aliado às pequenas dimensões dos componentes causam dificuldades para uma análise individual de cada sistema físico nas condições de funcionamento do alto-falante.

O sistema acústico do alto-falante é caracterizado por cavidades com pequenas espessuras de ar que interagem com uma membrana ou placa vibrante. Na análise vibro-acústica de sistemas com estas características, os efeitos viscotérmicos mostram-se importantes no comportamento dinâmico do sistema, como são mostrados em alguns trabalhos [2–4].

### 1.1.2 Efeitos viscotérmicos

Os efeitos viscotérmicos são os fenômenos de atrito viscoso e difusão térmica do fluido que são negligenciados no modelo acústico clássico. Porém, em sistemas acústicos com pequenas cavidades, a importância dos efeitos viscotérmicos podem ser relevantes e precisam ser incluídos no modelo de propagação acústica para maior precisão da análise.

A necessidade da aplicação de modelos de propagação acústica com efeitos viscotérmicos depende das propriedades do fluido, da faixa de frequência de análise e das dimensões mínimas das cavidades do sistema. As dimensões mínimas das cavidades de ar dos alto-falantes, que serão futuramente analisados, estão em torno de 0,1 mm onde a faixa de frequência de interesse é de até 7 kHz. Nestas condições, os efeitos viscotérmicos são importantes e sua inclusão no modelo acústico torna-se necessária para uma análise mais precisa do sistema [3, 4].

A inclusão de efeitos viscotérmicos no modelo acústico eleva muito a complexidade das equações que regem o modelo. A solução analítica de modelos acústicos viscotérmicos é possível apenas em casos muito particulares como os apresentados por [2, 5–7]. Para a solução de modelos acústicos viscotérmicos aplicados a sistemas mais complexos recorre-se aos métodos numéricos. Na literatura, encontram-se formulações numéricas para modelos acústicos com efeitos viscotérmicos utilizando o Método de Elementos Finitos (*Finite Element Method* - FEM) [8–14] e o Método de Elementos de Contorno (*Boundary Element Method* - BEM) [15, 16]. Atualmente, os códigos comerciais de análises vibro-acústicas por FEM e BEM não possuem esta modalidade de análise disponível.



### 1.1.3 Outras aplicações para os modelos acústicos viscotérmicos

Os modelos acústicos viscotérmicos podem ser utilizados em muitas outras aplicações como, por exemplo:

- Avaliação acústica de tubos com pequenos diâmetros: Esta é uma das primeiras aplicações publicadas de modelos acústicos viscotérmicos e possui um grande número de trabalhos com diferentes formas de abordagem [7, 17–19];
- Ressonadores esféricos [2, 5, 20, 21]: estes sistemas são utilizados para determinar propriedades de gases (como a velocidade do som) com elevado grau de precisão. O ressonador é composto por duas cascas hemisféricas unidas por parafusos. Por possuir uma geometria esférica, uma solução analítica da propagação acústica com efeitos viscotérmicos pode ser obtida. O modelo pode ser expandido para avaliação de outros aspectos como os efeitos do movimento da casca devido a pressão interna, dos furos dos transdutores e das frestas existentes na união aparafusada [2];
- Comportamento dinâmico de transdutores miniaturizados: transdutores como microfones são compostos por uma membrana vibrante e um eletrodo rígido com uma fina camada de ar entre eles. Estes sistemas possuem membranas circulares onde é possível a obtenção de soluções analíticas como as apresentadas nos trabalhos [21–26];
- Interação de finas camadas de fluido entre placas vibrantes: como estes tipos de sistema podem ser encontrados em muitas aplicações, existem uma grande quantidade de trabalhos com variadas abordagens para soluções analíticas [27–31] e numéricas [2, 8, 32, 33];
- Comportamento dinâmico de cabeçotes de impressoras jato-de-tinta: nesta aplicação analisa-se a propagação da onda acústica em canais de injeção de tinta no cabeçote de impressoras. A injeção da tinta é acionada por um sistema piezo-elétrico. As dimensões dos canais são da ordem de  $100\ \mu\text{m}$  e a faixa de frequência de interesse é de 30 kHz à 100kHz. As propriedades do material de algumas tintas indicam que os efeitos viscosos podem ter papel importante na análise da propagação da onda acústica. O sistema foi solucionado de forma analítica e numérica no trabalho [2].

## 1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

Diante das características geométricas e acústicas dos alto-falantes para aparelhos auditivos apresentadas nas seções anteriores, o presente trabalho tem o objetivo de implementar, avaliar e validar modelos acústicos com efeitos viscotérmicos. Estes modelos acústicos serão construídos com vistas à aplicação na análise de alto-falantes para aparelhos auditivos.

No Capítulo 2 será apresentada uma breve revisão bibliográfica, destacando a evolução dos principais modelos acústicos que incluem efeitos viscotérmicos encontrados na literatura. Neste capítulo são detalhados com mais profundidade dois modelos distintos que serão implementados e validados de forma analítica e numérica em capítulos posteriores.

Como os alto-falantes apresentam geometrias e condições de contorno complexas, há necessidade da implementação numérica dos modelos viscotérmicos. A implementação numérica será feita através das formulações FEM que serão descritas no Capítulo 3. As formulações FEM serão implementadas no código comercial Comsol 3.5a [34], pois ele permite implementar diretamente formulações na forma fraca.

A validação dos modelos numéricos serão feitas através da aplicação dos mesmos em um tubo simples na Seção 4.3. Na Seção 4.4, uma segunda geometria de tubo é testada para avaliar a convergência dos tipos de modelos numéricos implementados em geometrias mais complexas.

Para avaliar questões quanto à discretização do modelo numérico mais complexo, que será aqui chamado de modelo NSFL, será feito um estudo no Capítulo 5.

No Capítulo 6 faz-se uma análise das condições de contorno para avaliação das divergências entre os resultados calculados e os dados experimentais apresentadas no Capítulo 4. Nesta análise, será construído um modelo numérico que representa a radiação acústica do sistema em ambientes externos. Este modelo será acoplado às formulações numéricas de modelos acústicos viscotérmicos para avaliação da impedância de radiação e do efeito da posição dos sensores na análise experimental.

O modelo da radiação acústica em ambientes externos será construído por formulações FEM que utilizam a técnica *Perfectly Matched Layer* (PML) que se encontra implementada no módulo acústico do código comercial Comsol 3.5a [34]. A técnica PML tem objetivo de representar a dispersão das ondas acústicas no domínio externo sem produzir reflexões para o interior do domínio analisado.

## 2 MODELOS ACÚSTICOS VISCOTÉRMICOS

Neste capítulo apresenta-se uma breve introdução mostrando a evolução dos principais modelos acústicos com inclusão de efeitos viscotérmicos. Posteriormente, apresentam-se as equações básicas dos modelos acústicos viscotérmicos que serão utilizados neste trabalho.

### 2.1 INTRODUÇÃO

A base para o desenvolvimento de modelos acústicos são as relações conservativas obtidas pelas equações de: conservação da quantidade de movimento, conservação da energia e conservação da massa. Estas equações, somadas à equação de estado para gás perfeito, formam o sistema de equações básicas com o qual muitos modelos acústicos foram desenvolvidos.

Os primeiros trabalhos envolvendo propagação acústica incluindo efeitos viscotérmicos foram publicados por Kirchhoff e Rayleigh [17]. Nestes trabalhos, propõe-se uma solução para tubos cilíndricos através de uma equação transcendental chamada de solução completa de Kirchhoff. As soluções destas equações foram obtidas de forma aproximada, limitando a aplicabilidade do modelo devido a ordem da aproximação adotada. Mais tarde, maiores ordens de aproximação desta solução foram publicadas por Weston [18], ampliando a faixa de aplicação desta teoria para tubos cilíndricos.

Na literatura, os modelos acústicos viscotérmicos foram desenvolvidos de diferentes formas conforme a aplicação na qual cada modelo foi destinado. Estes modelos diferenciam-se principalmente pelas hipóteses simplificativas assumidas nas equações básicas. Os trabalhos de Zwikker e Kosten [35] e Iberall [36] se destacaram por originar um modelo simplificado que ficou conhecido como modelo *Low Reduced Frequency* (LRF). No modelo LRF, as hipóteses simplificativas aplicadas resultam na pressão acústica constante ao longo da seção transversal de sistemas como tubos e frestas.

Em 1975, Tijdeman [19] colocou em perspectiva os principais modelos de propagação acústica para tubos cilíndricos incluindo os modelos acima citados. Os modelos foram comparados com a aproximação numérica da solução completa de Kirchhoff desenvolvida por Tijdeman. Uma das conclusões de Tijdeman foi que a solução do modelo LRF abrange grande parte das soluções comparadas naquele trabalho. O

modelo LRF se destacou pela simplicidade de solução e foi expandido para outras aplicações como as encontradas em [4, 25, 26, 28, 30, 31, 37].

Em 1998, Beltman [2] publicou uma extensa revisão de modelos acústicos com efeitos viscotérmicos incluindo soluções analíticas para algumas geometrias regulares como tubos e frestas (finas camadas de ar entre duas superfícies). Neste e em outros trabalhos, Beltman [8, 33] propõem uma formulação FEM do modelo LRF com acoplamento fluido-estrutura. A formulação FEM do modelo LRF é muito semelhante à formulação FEM do modelo acústico clássico, porém a sua aplicação em geometrias irregulares pode não proporcionar resultados satisfatórios, devido às hipóteses simplificativas assumidas no modelo (ver Capítulo 3).

Mais recentemente, algumas diferentes formulações FEM para aplicação em problemas acústicos com efeitos viscotérmicos foram apresentadas em [9–11, 13]. Estas formulações utilizam um modelo menos simplificado que os modelos acústico clássico e LRF. Com menos simplificações, estas formulações possuem maior complexidade pois necessitam resolver sistemas de equações com três ou mais variáveis dependentes. Apesar da maior complexidade, estas formulações podem ser aplicadas em geometrias arbitrárias. O modelo utilizado para estas formulações FEM será aqui denominado modelo Navier-Stokes-Fourier linearizado (NSFL) [38] e será apresentado na próxima seção.

## 2.2 MODELO NAVIER-STOKES-FOURIER LINEARIZADO

Os modelos acústicos são geralmente desenvolvidos a partir de equações conservativas onde os termos de viscosidade e condução térmica do fluido estão presentes. O modelo acústico clássico elimina estes termos através de hipóteses simplificativas que possibilitam também a redução do sistema de equações para uma única equação diferencial parcial.

Com vistas à inclusão dos efeitos viscotérmicos no modelo acústico, apresenta-se aqui a derivação do sistema de equações que originarão o modelo NSFL e outros modelos simplificados, como o modelo LRF que será detalhado na próxima seção.

Assumindo que não há ação de forças de corpo no fluido, as equações conservativas utilizadas são [39]:

- Equação da conservação da quantidade de movimento para um fluido newtoniano cuja tensão de cisalhamento é possui relação

linear com a taxa de deformação (Equação de Navier-Stokes) [40]:

$$\varrho \frac{DU}{Dt} + \nabla P = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}), \quad (2.1)$$

sendo  $\varrho$  a densidade do fluido,  $\mathbf{U}$  o vetor velocidade do fluido,  $P$  a pressão total do fluido,  $\lambda$  o coeficiente de viscosidade de dilatação,  $\mu$  o coeficiente de viscosidade de cisalhamento,  $\frac{D(\cdot)}{Dt}$  o operador derivada total,  $\nabla(\cdot)$  o operador gradiente,  $\nabla \cdot (\cdot)$  o operador divergente e  $\nabla \times (\cdot)$  o operador rotacional;

- Equação de conservação da energia com o fluxo calor descrito pela lei de Fourier:

$$\varrho C_v \frac{DT}{Dt} + P \nabla \cdot \mathbf{U} = \Phi^{(visc)} + \kappa \Delta T, \quad (2.2)$$

sendo  $T$  a temperatura do fluido,  $C_v$  o calor específico a volume constante,  $\Phi^{(visc)}$  a função dissipação viscosa de energia mecânica,  $\kappa$  a condutividade térmica do fluido e  $\Delta(\cdot)$  o operador laplaciano;

- Equação de conservação da massa (Equação da continuidade):

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (2.3)$$

Para completar o sistema de equações utiliza-se uma relação constitutiva para o gás, dada por

$$P = R_0 \varrho T, \quad (2.4)$$

que é a equação de estado para gás perfeito sendo que  $R_0$  é a constante do gás.

A função  $\Phi^{(visc)}$  é uma relação não-linear expressada por

$$\Phi^{(visc)} = 2\mu d_{ij}d_{ji} + \lambda d_{kk}d_{ii}, \quad (2.5)$$

sendo

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.6)$$

o tensor taxa de deformação.

Assumindo que as perturbações acústicas são suficientemente pequenas tal que os termos não-lineares não são importantes, as Eqs. (2.1)

a (2.4) podem ser linearizadas inserindo as pequenas perturbações descritas abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{0} + \mathbf{u}', \\ P &= P_0 + p', \\ \varrho &= \rho_0 + \rho', \\ T &= T_0 + \tau', \end{aligned} \tag{2.7}$$

sendo que  $\mathbf{u}'$  o vetor velocidade de partícula,  $P_0$  a pressão do meio,  $p'$  a pressão acústica,  $\rho_0$  a densidade do meio,  $\rho'$  a densidade acústica,  $T_0$  a temperatura do meio e  $\tau'$  a temperatura acústica.

Inserindo as pequenas amplitudes nas Eqs. (2.1) a (2.4), negligenciando os termos não lineares e assumindo que o fluido encontra-se estacionário (sem escoamento), obtém-se

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla p' = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}') - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}'), \tag{2.8a}$$

$$\rho_0 C_v \frac{\partial \tau'}{\partial t} + P_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' = \kappa \Delta \tau', \tag{2.8b}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \tag{2.8c}$$

$$p' = R_0(\rho_0 \tau' + \rho' T_0). \tag{2.8d}$$

As equações acima serão aqui denominadas modelo NSFL e são conhecidas também como *Full Linearized Navier-Stokes model* [2]. Para a solução deste sistema, neste trabalho, assume-se que as pequenas perturbações nas Eqs. (2.8) são harmônicas, de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{u} e^{i\omega t}, \\ p' &= p e^{i\omega t}, \\ \tau' &= \tau e^{i\omega t}, \\ \rho' &= \rho e^{i\omega t}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

sendo  $\mathbf{u}$  o vetor de amplitude complexa da velocidade de partícula,  $p$  a amplitude complexa da pressão acústica,  $\tau$  a amplitude complexa da temperatura acústica e  $\rho$  a amplitude complexa da densidade acústica.

Ao inserir as perturbações harmônicas (2.9) nas Eqs. (2.8), tem-

se o seguinte sistema de equações:

$$i\omega\rho_0\mathbf{u} + \nabla p = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (2.10a)$$

$$i\omega\rho_0 C_v \tau + P_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = \kappa \Delta \tau, \quad (2.10b)$$

$$i\omega\rho + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.10c)$$

$$p = R_0(\rho_0 \tau + \rho T_0). \quad (2.10d)$$

As soluções analíticas das Eqs. (2.10) são muito complexas, sendo possíveis apenas em casos específicos, como os publicados por Bruneau *et. al.* [5], Hamery *et. al.* [24] e Beltman [2]. Neste trabalho, este sistema será solucionado numericamente pelo método de Elementos Finitos, sendo que a formulação será apresentada na Seção 3.3.

## 2.3 MODELO LOW REDUCED FREQUENCY

A partir do modelo NSFL obtêm-se outros modelos simplificados [2]. O modelo LRF inclui simplificações que torna possível a solução analítica de geometrias como tubos e frestas. Pela maior simplicidade, será aqui apresentado a derivação detalhada deste modelo aplicado à tubos cilíndricos baseado no trabalho de Tijdeman [19]. Na Seção 2.3.2 o modelo será escrito de uma forma generalizada, onde outras geometrias podem ser solucionadas.

### 2.3.1 Modelo LRF para tubos cilíndricos

Para o desenvolvimento das equações para este modelo adota-se o sistema de coordenadas cilíndricas com simetria axial da Figura 2.1 onde  $u$  e  $v$  são os velocidades de partícula em  $x$  e  $r$ , respectivamente.

As Eqs. (2.8) em coordenadas cilíndricas são dadas por

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{v'}{r} \right) + \\ &+ \mu \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (2.11a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial r} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{v'}{r} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial r} - \frac{v'}{r^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \right), \quad (2.11b)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 C_v \frac{\partial \tau'}{\partial t} + P_0 \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{v'}{r} \right) &= \\ &= \kappa \left( \frac{\partial^2 \tau'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (2.11c)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{v'}{r} \right) = 0, \quad (2.11d)$$

$$p' = R_0(\rho_0 \tau' + \rho' T_0). \quad (2.11e)$$

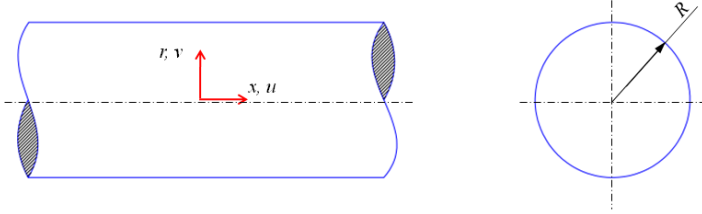


Figura 2.1: Sistema de coordenadas cilíndricas.

Para inclusão das hipóteses simplificativas e solução deste modelo, primeiramente escreve-se as variáveis e coordenadas das Eqs. (2.11) na forma adimensional. Para isto, as coordenadas  $(x, r)$  são transformadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{\omega}{c_0} x, \\ \hat{r} &= \frac{r}{R}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

sendo  $\hat{x}$  e  $\hat{r}$  coordenadas adimensionais nas direções axial e radial, respectivamente, e  $R$  o raio do tubo.

As pequenas perturbações harmônicas são escritas na forma adi-



dimensional abaixo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}' &= (u' \mathbf{e}_x + v' \mathbf{e}_r) = c_0 (\hat{u} \mathbf{e}_x + \hat{v} \mathbf{e}_r) e^{i\omega t}, \\
 p' &= P_0 \hat{p} e^{i\omega t} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \hat{p} e^{i\omega t}, \\
 \tau' &= T_0 \hat{\tau} e^{i\omega t}, \\
 \rho' &= \rho_0 \hat{\rho} e^{i\omega t},
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

sendo  $c_0$  a velocidade do som no fluido,  $\mathbf{e}_x$  o vetor unitário na direção axial,  $\mathbf{e}_r$  o vetor unitário na direção radial,  $\hat{u}$  a amplitude adimensional da velocidade de partícula na direção axial,  $\hat{v}$  a amplitude adimensional da velocidade de partícula na direção radial,  $\hat{\tau}$  a amplitude adimensional da temperatura acústica,  $\hat{p}$  a amplitude adimensional da pressão acústica e  $\hat{\rho}$  a amplitude adimensional da densidade acústica.

Ao inserir as perturbações e coordenadas adimensionais nas Eqs. (2.11), tem-se

$$\begin{aligned}
 i\hat{u} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} &= \frac{1}{3} \frac{\hat{k}}{s^2} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[ \hat{k} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{v}}{\hat{r}} \right] + \\
 &+ \frac{1}{s^2} \left[ \hat{k}^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} \right],
 \end{aligned} \tag{2.14a}$$

$$\begin{aligned}
 i\hat{v} + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\hat{k}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{r}} &= \frac{1}{s^2} \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left[ \hat{k} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{v}}{\hat{r}} \right] + \\
 &+ \frac{1}{s^2} \left[ \hat{k}^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{r}} - \frac{\hat{v}}{\hat{r}^2} \right],
 \end{aligned} \tag{2.14b}$$

$$i\hat{\rho} + \frac{1}{\hat{k}} \left[ \hat{k} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{v}}{\hat{r}} \right] = 0, \tag{2.14c}$$

$$i\hat{\tau} - i \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \hat{p} = \frac{1}{s^2 \sigma^2} \left[ \hat{k}^2 \frac{\partial^2 \hat{\tau}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\tau}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \hat{r}} \right], \tag{2.14d}$$

$$\hat{p} = \hat{\rho} + \hat{\tau}, \tag{2.14e}$$

sendo que os termos da Eq. (2.14) foram, previamente, agrupados nos

seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned}
 s &= R\sqrt{\rho_0\omega/\mu} && : \text{número de onda de cisalhamento;} \\
 \hat{k} &= R\omega/c_0 = Rk && : \text{frequência reduzida;} \\
 \gamma &= C_p/C_v && : \text{razão de calores específicos;} \\
 \sigma &= \sqrt{Pr} = \sqrt{\mu C_p/\kappa} && : \text{raiz quadrada do número de Prandtl.}
 \end{aligned}$$

Os parâmetros  $\gamma$  e  $\sigma$  são dependentes das propriedades do gás. O número de onda de cisalhamento (*shear wave number*) é uma razão entre os efeitos inerciais e os efeitos viscosos no gás. Em termos geométricos, o número de onda de cisalhamento quantifica uma razão entre o raio do tubo e a espessura da camada limite. O parâmetro  $\hat{k}$ , por sua vez, quantifica uma razão entre o raio do tubo e o comprimento de onda.

Após obtido o sistema de equações na forma adimensional, são adicionadas as seguintes hipóteses simplificativas que serão importantes para obtenção das soluções deste modelo:

- O comprimento de onda acústico é muito maior que o raio do tubo  $R$  ( $\hat{k} \ll 1$ );
- O comprimento de onda acústico é muito maior que a espessura da camada limite viscosa ( $\hat{k}/s \ll 1$ ).

Com as hipóteses simplificativas as Eqs. (2.14) são reduzidas, tornando-se o seguinte sistema de equações:

$$i\hat{u} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{s^2} \left( \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} \right), \quad (2.15a)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{r}} = 0, \quad (2.15b)$$

$$i\hat{\tau} - i \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \hat{p} = \frac{1}{s^2 \sigma^2} \left( \frac{\partial^2 \hat{\tau}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \hat{r}} \right), \quad (2.15c)$$

$$i\hat{k}\hat{\rho} + \left( \hat{k} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{v}}{\hat{r}} \right) = 0, \quad (2.15d)$$

$$\hat{p} = \hat{\rho} + \hat{\tau}. \quad (2.15e)$$

Para demonstração da solução, aplicam-se as seguintes condições

de contorno ao problema:

$$\begin{aligned} \hat{u} = \hat{v} = \hat{\tau} = 0 & \quad \text{para } \hat{r} = 1 \text{ (parede do tubo),} \\ \hat{v} = 0 & \quad \text{para } \hat{r} = 0 \text{ (centro do tubo).} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Na Eq. (2.15b) pode-se verificar que a variável pressão se mantém constante na direção  $\hat{r}$  que possibilita a solução da Eq. (2.15a) para  $\hat{u}$ . Através das condições de: valor finito  $\hat{u}$  para  $\hat{r} = 0$  e  $\hat{u} = 0$  para  $\hat{r} = 1$ , obtém-se a seguinte solução:

$$\hat{u}(\hat{x}, \hat{r}) = \frac{i}{\gamma} \frac{d\hat{p}}{d\hat{x}} \left[ 1 - \frac{J_0(i^{3/2}\hat{r}s)}{J_0(i^{3/2}s)} \right], \quad (2.17)$$

sendo  $J_0()$  a função de Bessel de ordem 0.

A equação da energia (2.15c) possui solução similar para a temperatura acústica adimensional  $\hat{\tau}$  através das condições de: valor finito  $\hat{\tau}$  para  $\hat{r} = 0$  e  $\hat{\tau} = 0$  para  $\hat{r} = 1$ . A solução para  $\hat{\tau}(\hat{x}, \hat{r})$  é dada por

$$\hat{\tau}(\hat{x}, \hat{r}) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \hat{p} \left[ 1 - \frac{J_0(i^{3/2}\hat{r}s\sigma)}{J_0(i^{3/2}s\sigma)} \right]. \quad (2.18)$$

Combinando-se as equações (2.18) e (2.15e) obtém-se a seguinte solução para  $\hat{\rho}$ :

$$\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{r}) = \hat{p} \left\{ 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left[ 1 - \frac{J_0(i^{3/2}\hat{r}s\sigma)}{J_0(i^{3/2}s\sigma)} \right] \right\}. \quad (2.19)$$

Finalmente, substitui-se as soluções obtidas na equação da continuidade (2.15d) onde esta será integrada em relação à  $\hat{r}$  para solucionar a velocidade de partícula adimensional  $\hat{v}$ . Após integração obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{v}\hat{r} = ik\hat{p} \left[ \frac{1}{2}\hat{r}^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( \frac{1}{2}\hat{r}^2 - \frac{\hat{r}}{i^{3/2}s\sigma} \frac{J_1(i^{3/2}\hat{r}s\sigma)}{J_0(i^{3/2}s\sigma)} \right) \right] + \\ + \frac{i\hat{k}}{\gamma} \frac{d^2\hat{p}}{d\hat{x}^2} \left[ \frac{1}{2}\hat{r}^2 - \frac{\hat{r}}{i^{3/2}s} \frac{J_1(i^{3/2}\hat{r}s)}{J_0(i^{3/2}s)} \right] + F(\hat{x}), \end{aligned} \quad (2.20)$$

sendo  $J_1()$  a função de Bessel de ordem 1.

A condição de contorno na parede do tubo ( $\hat{v} = 0$  para  $\hat{r} = 1$ ) torna a função  $F(\hat{x})$  igual a

$$-F(\hat{x}) = \frac{1}{2}\hat{p} \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{J_2(i^{3/2}s\sigma)}{J_0(i^{3/2}s\sigma)} \right] - \frac{1}{2\gamma} \frac{d^2\hat{p}}{d\hat{x}^2} \frac{J_2(i^{3/2}s)}{J_0(i^{3/2}s)}. \quad (2.21)$$

Para satisfazer a condição de simetria ( $\hat{v} = 0$  para  $\hat{r} \rightarrow 0$ ) na Eq. (2.20), o termo  $F(\hat{x})$  deve ser nulo e a Eq. (2.21) se reduz a

$$\frac{d^2 \hat{p}}{d\hat{x}^2} + \left(\frac{\Gamma}{i}\right)^2 \hat{p} = 0, \quad (2.22)$$

sendo

$$\Gamma = \sqrt{\frac{J_0(i^{3/2}s)}{J_2(i^{3/2}s)} \frac{\gamma}{n(s\sigma)}}, \quad (2.23)$$

$$n(s\sigma) = \left[1 + \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right] \frac{J_2(i^{3/2}s\sigma)}{J_0(i^{3/2}s\sigma)}\right]^{-1}. \quad (2.24)$$

A função  $\Gamma$  é denominada constante de propagação que, após obtida, possibilita a solução da Eq. (2.22) de forma semelhante ao modelo acústico clássico. Após solução da Eq. (2.22), as outras variáveis são obtidas através das Eqs. (2.17) a (2.20).

As condições de contorno para a Eq. (2.22) podem ser as mesmas adotadas na acústica clássica, porém devem-se fazer alguns ajustes. A condição de impedância, por exemplo, precisa ser corrigida devido aos efeitos viscotérmicos, pois neste caso não haverá mais um perfil de velocidade plano.

### 2.3.2 Modelo LRF para outras geometrias

Na literatura, soluções para outras geometrias foram obtidas de forma semelhante à que foi apresentada na Seção 2.3.1. Em seu trabalho, Beltman [2] escreve o modelo LRF de forma mais generalizada utilizando operadores e coordenadas adimensionais específicas para cada tipo de geometria. Este modelo é escrito da seguinte forma:

$$\hat{\Delta}^{pd} \hat{p}(\hat{\mathbf{x}}^{pd}) - \hat{k}^2 \Gamma^2(s\sigma) \hat{p}(\hat{\mathbf{x}}^{pd}) = -i\hat{k} n(s\sigma) \Gamma^2(s\sigma) \Re, \quad (2.25)$$

sendo  $\hat{\Delta}^{pd}$  o operador laplaciano adimensional com coordenadas na direção de propagação e  $\hat{\mathbf{x}}^{pd}$  o vetor de coordenadas adimensionais na direção de propagação.

As funções  $\Gamma(s\sigma)$ ,  $n(s\sigma)$  e  $\Re$  são dadas por

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\gamma}{n(s\sigma)B(s)}}, \quad (2.26)$$

$$n(s\sigma) = \left[ 1 + \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right] D(s\sigma) \right]^{-1}, \quad (2.27)$$

$$\Re = \frac{1}{\hat{A}^{cd}} \int_{\partial \hat{A}^{cd}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} \, d\partial \hat{A}^{cd}, \quad (2.28)$$

sendo

$$\hat{\mathbf{v}} = (i\omega/c_0) \mathbf{u}^s, \quad (2.29)$$

$$s = l \sqrt{\frac{\rho_0 \omega}{\mu}}, \quad (2.30)$$

$$\hat{k} = \frac{\omega l}{c_0}, \quad (2.31)$$

$$B(s) = \frac{1}{\hat{A}^{cd}} \int_{\hat{A}^{cd}} A(s, \hat{\mathbf{x}}^{cd}) d\hat{A}^{cd}, \quad (2.32)$$

$$D(s\sigma) = \frac{1}{\hat{A}^{cd}} \int_{\hat{A}^{cd}} C(s\sigma, \hat{\mathbf{x}}^{cd}) d\hat{A}^{cd}, \quad (2.33)$$

onde  $\hat{\mathbf{x}}^{cd}$  é o vetor de coordenadas adimensionais na direção transversal à propagação,  $\hat{A}^{cd}$  é a dimensão característica na direção transversal à propagação. O parâmetro  $l$  é um comprimento característico que foi representado pelo o raio do tubo na derivação anterior.

No termo à direita na Eq. (2.25) pode-se prescrever uma velocidade na direção transversal à propagação dada pela Eq. (2.28), onde  $\hat{\mathbf{v}}$  é a velocidade prescrita adimensional. Este termo não foi apresentado na derivação da Seção 2.3.1, pois as condições de contorno adotadas foram de velocidade nula nas paredes do tubo. Na análise da interação entre uma estrutura vibrante e uma fresta de ar, este termo pode ser utilizado para acoplamento destes sistemas através da Eq. (2.29), onde  $\mathbf{u}^s$  é o vetor deslocamento da estrutura.

As funções  $A(s, \hat{\mathbf{x}}^{cd})$  e  $C(s\sigma, \hat{\mathbf{x}}^{cd})$  estão presentes nas soluções de velocidade de partícula, temperatura acústica e densidade acústica adimensionais da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{u}}^{pd}(s, \hat{\mathbf{x}}^{pd}, \hat{\mathbf{x}}^{cd}) = -\frac{i}{\hat{k}\gamma} A(s, \hat{\mathbf{x}}^{cd}) \nabla^{pd} \hat{p}(\hat{\mathbf{x}}^{pd}), \quad (2.34)$$

$$\hat{\tau}(s\sigma, \hat{\mathbf{x}}^{pd}, \hat{\mathbf{x}}^{cd}) = -\left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \hat{p}(\hat{\mathbf{x}}^{pd}) C(s\sigma, \hat{\mathbf{x}}^{cd}), \quad (2.35)$$

$$\hat{\rho}(s\sigma, \hat{\mathbf{x}}^{pd}, \hat{\mathbf{x}}^{cd}) = \hat{p}(\hat{\mathbf{x}}^{pd}) \left[ 1 + \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) C(s\sigma, \hat{\mathbf{x}}^{cd}) \right]. \quad (2.36)$$

Para o caso de tubos cilíndricos, a função  $A(s, \hat{\mathbf{x}}^{cd})$  está presente na solução de  $\hat{\mathbf{u}}$  na Eq. (2.17) como

$$A(s, \hat{r}) = \left[ 1 - \frac{J_0(i^{3/2}\hat{r}s)}{J_0(i^{3/2}s)} \right]. \quad (2.37)$$

Na Eq. (2.34) percebe-se que somente a função  $A(s, \hat{\mathbf{x}}^{cd})$  depende de coordenadas na direção transversal à propagação determinando o perfil de velocidade nesta direção. Como pode-se ver na Figura 2.2, a função  $A(s, \hat{r})$  forma perfis de acordo com os valores do número de onda de cisalhamento  $s$ . Os perfis tendem a formas parabólicas à medida que  $s$  é reduzido. Em outras palavras, o efeito de atrito viscoso é predominante à medida em que se diminui a frequência de excitação do sistema ou o diâmetro do tubo.

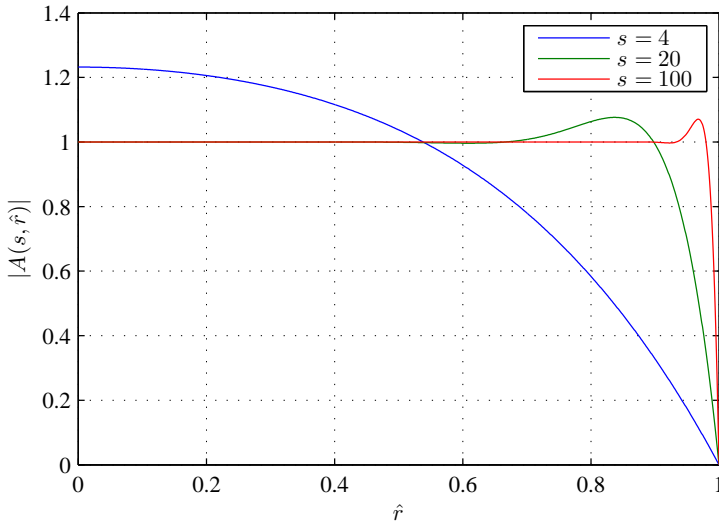


Figura 2.2: Magnitude da função  $A(s, \hat{r})$  para tubos cilíndricos.

Portanto, com a Eq. (2.25), juntamente com os operadores, coordenadas e funções apropriadas, pode-se obter a solução analítica para a propagação acústica com efeitos viscotérmicos para algumas geometrias como tubos circulares, tubos retangulares, frestas circulares e frestas retangulares [2, 7]. As funções  $A(s, \hat{\mathbf{x}}^{cd})$ ,  $B(s)$ ,  $C(s\sigma, \hat{\mathbf{x}}^{cd})$  e  $D(s\sigma)$  para outras geometrias juntamente com os respectivos operadores e coordenadas adimensionais são encontradas em [2, 6].

Algumas soluções analíticas do modelo LRF aplicado em problemas de engenharia são encontradas nos trabalhos [2–4, 41, 42]. Porém, estas aplicações envolvem geometrias regulares com seções transversais constantes como tubos, frestas retangulares e frestas circulares. Em sistemas com geometrias irregulares como as encontradas nos alto-falantes de aparelhos auditivos, o modelo LRF não pode ser aplicado pois não é possível determinar uma constante de propagação  $\Gamma$  de maneira apropriada.

A solução de modelos acústicos viscotérmicos aplicados em geometrias mais complexas podem ser obtidas por alguns métodos numéricos que serão apresentados no Capítulo 3.





### 3 SOLUÇÃO NUMÉRICA DE MODELOS ACÚSTICOS VISCOTÉRMICOS

As soluções analíticas de modelos acústicos viscotérmicos são limitadas a geometrias e condições de contorno muito particulares. A complexidade geométrica das cavidades e da membrana do alto-falante, juntamente com a exigência de uma análise com acoplamento fluido-estrutura, torna necessário a solução deste sistema por métodos numéricos.

O método de Elementos Finitos é uma ferramenta de análise numérica muito versátil que permite solucionar geometrias complexas com acoplamento de múltiplos sistemas físicos. Os códigos comerciais mais difundidos de análises por FEM ainda não possuem análises acústicas com efeitos viscotérmicos, sendo necessário a formulação e implementação destas análises.

Neste capítulo serão mostradas três abordagens diferentes de aplicação do FEM para solução numérica dos modelos acústicos viscotérmicos apresentados no capítulo anterior. As formulações serão apresentadas em ordem crescente de complexidade. Como introdução, apresenta-se primeiramente a formulação FEM para acústica clássica. Em seguida, apresenta-se a formulação para o modelo LRF, onde serão apontadas semelhanças com o modelo clássico. E, por último, serão expostas duas formulações para o modelo NSFL.

As formulações FEM podem ser obtidas por diferentes formas. O princípio dos trabalhos virtuais e os métodos variacionais são ferramentas clássicas para formulação FEM em grande parte dos problemas da mecânica estrutural onde sua argumentação geralmente possui significado físico. Para problemas como os modelos acústicos viscotérmicos, as formulações encontradas na literatura são obtidas pelo método de resíduos ponderados. Assim como nos métodos variacionais, o método de resíduos ponderados incorpora as equações diferenciais do problema na forma fraca (*weak form*) [43].

As formulações na forma fraca foram implementadas no código comercial Comsol 3.5a [34]. Este código comercial foi escolhido por permitir a aplicação direta de formulações na forma fraca e executar de forma automática os procedimentos de construção das matrizes do elemento e montagem das matrizes globais para a solução do sistema. Além disso, o Comsol também possui algoritmos para construção de malhas, solução dos sistemas lineares e pós-processamento dos resultados que facilitaram a análise dos problemas.

### 3.1 FORMULAÇÃO FEM PARA O MODELO ACÚSTICO CLÁSSICO

A formulação em FEM para acústica clássica pode ser formulada tanto por métodos variacionais como pelo método de resíduos ponderados. Será aqui demonstrado a formulação obtida pelo método de resíduos ponderados pois este método será utilizado também para formulações dos modelos acústicos viscotérmicos. Considerando pequenas amplitudes harmônicas de perturbação, o modelo acústico clássico é determinado pela equação diferencial parcial abaixo:

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c_0^2} p = 0. \quad (3.1)$$

A Eq. (3.1) é conhecida como equação de Helmholtz onde as condições de contorno mais comuns são determinadas da seguinte forma:

$$p = g_A \text{ (Condições essenciais)}, \quad (3.2)$$

$$(\nabla p) \cdot \mathbf{n} = h_A \text{ (Condições não-essenciais)}, \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal ao contorno do domínio analisado.

O termo  $g_A$  são valores de pressão acústica prescritas. Com o termos  $h_A$  pode-se prescrever valores de velocidade de partícula ( $\mathbf{u}_A$ ) normais ao contorno da seguinte forma:

$$h_A = -i\omega\rho_0(\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}). \quad (3.4)$$

A Eq. (3.1) e suas condições de contorno estabelecem o problema na formulação forte (*strong form*), pois estas devem ser satisfeitas continuamente em todos os pontos do domínio. Com a aplicação de soluções aproximadas na Eq. (3.1) obtém-se

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c_0^2} p = R(p), \quad (3.5)$$

sendo  $R(\cdot)$  a função resíduo e  $p$  a solução aproximada dada pela seguinte combinação linear:

$$p = \sum_{i=1, \dots, m} a_i f_i, \quad (3.6)$$

sendo  $f_i$  a  $i$ -ésima função de aproximação,  $a_i$  o  $i$ -ésimo coeficiente da combinação linear e  $m$  é o número de termos na combinação linear.

De acordo com o método de resíduos ponderados os “melhores” valores de  $a_i$  satisfazem a seguinte expressão [43]:

$$\int_{\Omega} p_i^* R(p) \, d\Omega = 0 \text{ para } i = 1, \dots, m, \quad (3.7)$$

sendo cada  $p_i^*$  uma função ponderação e  $\Omega$  o interior do domínio analisado.

Como a função resíduo  $R(p)$  nada mais é do que a equação diferencial do problema, substitui-se a Eq. (3.5) na Eq. (3.7) que resulta em

$$\int_{\Omega} p_i^* \Delta p + p_i^* \frac{\omega^2}{c_0^2} p \, d\Omega = 0. \quad (3.8)$$

Para redução da ordem das derivadas do primeiro termo da Eq. (3.8), utiliza-se a regra da cadeia dada por

$$\nabla \cdot (p_i^* \nabla p) = \nabla p_i^* \cdot \nabla p + p_i^* \Delta p. \quad (3.9)$$

A substituição da Eq. (3.9) na Eq. (3.8) resulta em

$$\int_{\Omega} -\nabla p_i^* \cdot \nabla p + \nabla \cdot (p_i^* \nabla p) + p_i^* \frac{\omega^2}{c_0^2} p \, d\Omega = 0. \quad (3.10)$$

Aplicando o teorema da divergência de Gauss no segundo termo da Eq. (3.10), obtém-se a seguinte equação:

$$\int_{\Omega} -\nabla p_i^* \cdot \nabla p + \frac{\omega^2}{c_0^2} p_i^* p \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (p_i^* \nabla p) \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0, \quad (3.11)$$

onde  $\partial\Omega$  é o contorno do domínio analisado.

O teorema da divergência proporciona a inclusão de condições de contorno não-essenciais no equacionamento na forma de uma integral sobre  $\partial\Omega$ . A Eq. (3.11) juntamente com as condições de contorno essenciais determinam a formulação do problema na forma fraca.

Pelo FEM, divide-se o domínio total do problema analisado em subdomínios menores denominados elementos. Em cada elemento determina-se um conjunto de funções de aproximação e de graus de liberdade satisfazendo alguns critérios de convergência. Deste modo, na acústica clássica, a pressão acústica em cada elemento é expressa em termos da combinação linear de funções de aproximação e das pressões acústicas nodais, sendo escritas da seguinte forma matricial:

$$p = \{N\}^T \{P_e\}, \quad (3.12)$$

onde:

$$\{N\} = \{N_1 \ N_2 \ \cdots \ N_q\}^T, \quad (3.13)$$

$$\{P_e\} = \{P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_q\}^T, \quad (3.14)$$

sendo  $\{P_e\}$  o vetor de de pressões acústicas em cada nó do elemento,  $\{N\}$  o vetor de funções de aproximação do elemento.

Seguindo o método de Galerkin, as funções ponderação são iguais as funções de aproximação ( $p^* = [N]$ ). Portanto, com a substituição da Eq. (3.12) e das funções ponderação na formulação fraca (3.11), obtém-se

$$-\omega^2 [M_e^a] \{P_e\} + [K_e^a] \{P_e\} = \{0\}, \quad (3.15)$$

sendo  $[K_e^a]$  a matriz de rigidez acústica do elemento e  $[M_e^a]$  a matriz de inércia acústica do elemento.

As matrizes  $[K_e^a]$  e  $[M_e^a]$  são dadas por

$$[K_e^a] = \int_{\Omega_e} [\nabla N] [\nabla N]^T d\Omega_e, \quad (3.16)$$

$$[M_e^a] = \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_e} \{N\} \{N\}^T d\Omega_e, \quad (3.17)$$

onde  $\Omega_e$  é o interior do domínio do elemento e  $[\nabla N]$  é a matriz dos gradientes das funções de aproximação.

A matriz  $[\nabla N]$  depende do sistema de coordenadas do problema. Como exemplo, para um sistema de coordenadas cartesiano ortogonal tridimensional, a matriz  $[\nabla N]$  é dada por

$$[\nabla N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_q}{\partial x_1} & \frac{\partial N_q}{\partial x_2} & \frac{\partial N_q}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

sendo  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  as direções do sistema de coordenadas.

Após obtidas as matrizes elementares, tem-se o processo de montagem (*assembly process*). Este processo constrói as matrizes globais do sistema através da conexão das matrizes de elementos adjacentes que possuem pontos nodais em comum. Com as matrizes globais obtém-se a equação do problema acústico clássico na forma discreta. Como exemplo, considerando uma cavidade acústica fechada com paredes rígidas

( $h_A = 0$ ), tem-se

$$-\omega^2 [M^a] \{P\} + [K^a] \{P\} = \{0\}, \quad (3.19)$$

sendo  $\{P\}$ ,  $[M^a]$  e  $[K^a]$  respectivamente: o vetor de pressões nodais, a matriz de inércia global e a matriz de rigidez global acústicas.

### 3.2 FORMULAÇÃO FEM PARA O MODELO LRF

No trabalho de Beltman [2] encontra-se a formulação de Elementos Finitos para o modelo LRF que é obtida pelo método de resíduos ponderados. Esta formulação é desenvolvida a partir da Eq. (2.25) onde as variáveis são dependentes somente das coordenadas na direção de propagação  $\mathbf{x}^{pd}$ . Neste sentido, os elementos derivados para o modelo LRF possuem características unidimensionais ou bidimensionais.

Após a formulação, a discretização do sistema é similar ao modelo acústico clássico resultando no seguinte sistema de equações globais:

$$-\omega^2 [M^a(s)] \{P\} + [K^a] \{P\} = \{0\}. \quad (3.20)$$

As matrizes de inércia e rigidez acústica são calculadas por

$$[M^a(s)] = -\frac{\Gamma^2}{c_0^2} \Omega^{cd} \int_{\Omega^{pd}} \{N\} \{N\}^T d\Omega^{pd}, \quad (3.21)$$

$$[K^a] = \Omega^{cd} \int_{\Omega^{pd}} [\nabla^{pd} N] [\nabla^{pd} N]^T d\Omega^{pd}, \quad (3.22)$$

sendo  $\Omega^{pd}$  e  $\Omega^{cd}$  as dimensões do domínio acústico na direção de propagação e na direção transversal à propagação respectivamente.

As matrizes de inércia e rigidez acústicas do modelo LRF e do modelo acústico clássico são praticamente idênticas sendo diferenciadas apenas pela constante  $-\Gamma^2$  na matriz  $[M^a(s)]$ . Neste sentido, pode-se aplicar o modelo LRF em Elementos Finitos desenvolvidos para acústica clássica onde os efeitos viscotérmicos são incluídos através de um número de onda  $\tilde{k}$  ou uma velocidade do som no meio  $\tilde{c}_0$  calculados da seguinte forma [44]:

$$\tilde{k} = \frac{k\Gamma}{i}, \quad (3.23)$$

$$\tilde{c}_0 = \frac{ic_0}{\Gamma}, \quad (3.24)$$

sendo que  $k$  é o número de onda utilizado na acústica clássica.

Como pode-se visualizar, a formulação de Elementos Finitos para o modelo LRF possui o termo  $\Gamma$  que é obtido através de soluções analíticas como a demonstrada na Seção 2.3.1. Por esta razão, a aplicabilidade desta formulação numérica possui limitações tanto geométricas quanto de condições que satisfaçam as hipóteses simplificativas do modelo. As limitações desta formulação serão avaliadas no Capítulo 4.

### 3.3 FORMULAÇÃO FEM PARA O MODELO NSFL

A aplicação que motivou este trabalho possui geometrias complexas com variações bruscas que não são previstas pelo modelo LRF. Para obter um modelo numérico mais robusto e aplicável a geometrias e condição de contorno mais complexas optou-se pela formulação por Elementos Finitos do modelo NSFL. A formulação será baseada no sistema de equações (2.10), onde a equação de Navier-Stokes (2.10a) é escrita da seguinte forma:

$$i\omega\rho_0\mathbf{u} + \nabla p = \sum_{rs} \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial x_s} \Phi_{rs}, \quad (3.25)$$

onde  $\Phi_{rs}$  é o tensor tensão viscosa [13], dado por

$$\Phi_{rs} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{rs} + \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \right). \quad (3.26)$$

Os índices  $r$  e  $s$  denotam as direções do sistema de coordenadas adotado. O termo  $\delta_{rs}$  é conhecido como delta de Kronecker que é dado por

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & r \neq s. \end{cases} \quad (3.27)$$

Diferentemente da formulação FEM para o modelo LRF, as formulações para o modelo NSFL solucionam a temperatura acústica e a velocidade de partícula de forma numérica. Serão aqui implementadas duas formas de abordagem: uma formulação irredutível e uma formulação mista (*mixed formulation*).

A formulação irredutível possui menor quantidade de graus de liberdade que a formulação mista. Porém, na literatura, foram constatados problemas numéricos para solução pela formulação FEM irredutível devido ao efeito de travamento (“*locking*”) [9, 11]. A formulação

mista é uma alternativa para evitar o efeito de travamento. Para verificação da eficiência e limitações das formulações irreduzível e mista, optou-se pela implementação de ambas formulações.

### 3.3.1 Formulação irreduzível

Esta formulação é baseada no trabalho de Joly *et. al.* [45], no qual o sistema de equações do modelo NSFL (2.10) é, algebricamente, reduzido a um sistema de equações com as variáveis de temperatura acústica e velocidade de partícula.

Para reduzir as Eqs. (2.10), elimina-se a densidade acústica da equação da continuidade através da substituição da Eq. (2.10d) na Eq. (2.10c), que resulta em

$$i\omega \left( \frac{p}{P_0} - \frac{\tau}{T_0} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.28)$$

Elimina-se também a pressão acústica ( $p$ ) da equação de Navier-Stokes pela substituição da Eq. (3.28) na Eq. (3.25). Desta forma, o sistema de Eqs. (2.10) será reduzido para

$$i\omega \rho_0 \mathbf{u} + \frac{P_0}{T_0} \nabla \tau - \left( \frac{P_0}{i\omega} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \sum_{rs} \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial x_s} \Phi_{rs}, \quad (3.29a)$$

$$i\omega \rho_0 C_v \tau + P_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \kappa \Delta \tau, \quad (3.29b)$$

e será aqui denominado formulação irreduzível.

As condições de contorno são atribuídas da seguinte forma:

I - Condições de contorno térmicas:

$$\tau = g_T \text{ (temperatura prescrita)}, \quad (3.30)$$

$$\kappa \nabla \tau \cdot \mathbf{n} = h_T \text{ (fluxo de calor prescrito)}. \quad (3.31)$$

II - Condições de contorno mecânicas:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_M \text{ (velocidade prescrita)}, \quad (3.32)$$

$$(-pI + \Phi) \mathbf{n} = \mathbf{h}_M \text{ (tensão prescrita)}, \quad (3.33)$$

sendo  $\mathbf{n}$  o vetor unitário normal ao contorno,  $I$  o tensor identidade e  $p$

a pressão acústica obtida na Eq. (3.28) dada por

$$p = \frac{P_0}{T_0} \tau - \frac{P_0}{i\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (3.34)$$

Através da Eq. (3.34) obtém-se o valor da pressão acústica no pós-processamento da solução do sistema na Eq. (3.29).

O sistema de equações diferenciais parciais na Eq. (3.29) pode ser escrito na forma fraca através do método de resíduos ponderados. Por este método multiplica-se o sistema de equações por funções ponderação seguindo pela integração sobre o domínio do fluido. A integração por partes e o teorema da divergência reduzem as derivadas de segunda ordem do sistema e estabelecem as condições de contorno naturais das Eqs. (3.31) e (3.33). Estes procedimentos estão mais detalhados no Apêndice (A.1) onde obtém-se as Eqs. (3.29) na forma fraca, dadas por

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_r^* i\omega \rho_0 u_r - \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x_r} \right) \left[ \frac{P_0}{T_0} \tau - \frac{P_0}{i\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \sum_s \left[ \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x_s} \right) \Phi_{rs} \right] d\Omega + \\ + \int_{\partial\Omega} u_r^* h_{Mr} d\partial\Omega = 0, \end{aligned} \quad (3.35a)$$

$$\int_{\Omega} \tau^* i\omega \rho_0 C_v \tau + \tau^* P_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \kappa \nabla \tau^* \cdot \nabla \tau d\Omega - \int_{\partial\Omega} \tau^* h_T d\partial\Omega = 0, \quad (3.35b)$$

sendo  $u_r^*$  a função ponderação correspondente a velocidade de partícula na direção  $\mathbf{e}_r$ ,  $\tau^*$  a função ponderação correspondente a temperatura acústica e os índices  $r$  e  $s$  denotam as direções do sistema de coordenadas.

Através da aproximação de Galerkin, pode-se obter a seguinte equação discretizada do problema:

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\tau\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{h_M\} \\ \{h_T\} \end{Bmatrix}, \quad (3.36)$$



sendo

$$[A] = \int_{\Omega} u_r^* i\omega \rho_0 u_r - \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x_r} \right) \frac{P_0}{i\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \sum_s \left[ \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x_s} \right) \Phi_{rs} \right] d\Omega, \quad (3.37)$$

$$[B] = \int_{\Omega} - \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x_r} \right) \frac{P_0}{T_0} \tau \, d\Omega, \quad (3.38)$$

$$[C] = \int_{\Omega} -\tau^* \frac{i\omega \rho_0 C_v}{T_0} \tau - \frac{\kappa}{T_0} \nabla \tau^* \cdot \nabla \tau \, d\Omega. \quad (3.39)$$

Os termos  $\{h_M\}$  e  $\{h_T\}$  dependem de condições de contorno não-essenciais do problema analisado.

A simetria apresentada na Eq. (3.36) é obtida pela divisão da Eq. (3.35b) por  $-T_0$  de acordo com a proposta de [13, 46]. A simetria do sistema de equações possui vantagens em alguns métodos de solução direta reduzindo o custo computacional da solução [46].

Esta formulação representa um sistema numericamente instável devido ao efeito de travamento (“*locking*”) [9]. Este efeito é muito dependente da forma na qual o sistema é discretizado e pode ser reduzido utilizando malhas específicas ou com refino adaptativo [11]. Outra forma de evitar a instabilidade numérica é a aplicação de formulações mistas [9, 13] como a que será apresentada na próxima seção.

### 3.3.2 Formulação mista

Nesta formulação, a pressão acústica ( $p$ ) juntamente com a equação da continuidade permanecem no sistema de equações do modelo NSFL. A densidade acústica ( $\rho$ ) é removida da Eq. (2.10) da mesma forma apresentada na Seção 3.3.1. Utiliza-se a Eq. (3.28) para remover a velocidade de partícula da Eq. (2.10b). Aplicando as substituições acima a formulação mista na forma forte fica composta pelo seguinte sistema de equações:

$$i\omega \rho_0 \mathbf{u} + \nabla p = \sum_{rs} \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial x_s} \Phi_{rs}, \quad (3.40a)$$

$$i\omega \rho_0 C_p \tau - i\omega p = \kappa \Delta \tau, \quad (3.40b)$$

$$i\omega \left( \frac{p}{P_0} - \frac{\tau}{T_0} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.40c)$$

juntamente com as condições de contorno nas Eqs. (3.30) a (3.33).

A formulação mista na Eq. (3.40) pode ser escrita na forma fraca, através do método de resíduos ponderados detalhado no Apêndice (A.2), que resulta no seguinte sistema de equações:

$$\int_{\Omega} u_r^* i\omega \rho_0 u_r - \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x_r} \right) p + \sum_s \left[ \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x_s} \right) \Phi_{rs} \right] d\Omega + \int_{\partial\Omega} u_r^* h_{Mr} d\partial\Omega = 0, \quad (3.41a)$$

$$\int_{\Omega} \tau^* i\omega \rho_0 C_p \tau - \tau^* i\omega p + \kappa \nabla \tau^* \cdot \nabla \tau d\Omega - \int_{\partial\Omega} \tau^* h_T d\partial\Omega = 0, \quad (3.41b)$$

$$\int_{\Omega} p^* i\omega \frac{p}{P_0} - p^* i\omega \frac{\tau}{T_0} + p^* \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0. \quad (3.41c)$$

Para tornar simétricas as matrizes do sistema discretizado por FEM, divide-se Eq. (3.41b) por  $-T_0$  e multiplica-se a Eq. (3.41c) por  $-1$ . A equação do sistema pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} [A] & [0] & [B] \\ [0] & [C] & [D] \\ [B]^T & [D]^T & [E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\tau\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{h_M\} \\ \{h_T\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (3.42)$$

sendo

$$[A] = \int_{\Omega} u_r^* i\omega \rho_0 u_r + \sum_s \left[ \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x_s} \right) \Phi_{rs} \right] d\Omega, \quad (3.43)$$

$$[B] = \int_{\Omega} - \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x_r} \right) p d\Omega, \quad (3.44)$$

$$[C] = \int_{\Omega} -\tau^* \frac{i\omega \rho_0 C_p}{T_0} \tau - \frac{\kappa}{T_0} \nabla \tau^* \cdot \nabla \tau d\Omega, \quad (3.45)$$

$$[D] = \int_{\Omega} \tau^* \frac{i\omega}{T_0} p d\Omega, \quad (3.46)$$

$$[E] = \int_{\Omega} -p^* i\omega \frac{p}{P_0} d\Omega. \quad (3.47)$$

## 4 VALIDAÇÃO DOS MODELOS ACÚSTICOS VISCOTÉRMICOS

Neste capítulo serão aplicadas as formulações para modelos acústicos viscotérmicos apresentadas nos capítulos anteriores. Como objeto de estudo serão adotadas dois sistemas acústicos para análise com modelos analíticos e numéricos. A geometria dos sistemas são tubulares e serão avaliadas experimentalmente para comparação dos resultados.

Primeiramente, será avaliado um tubo simples onde serão aplicadas a solução analítica do modelo LRF e as formulações FEM do modelo NSFL apresentadas no capítulo anterior. Em seguida, um tubo com uma variação brusca de seção será avaliado com as formulações FEM dos modelos LRF e NSFL para uma avaliação da aplicabilidade de cada modelo numérico através da comparação com dados experimentais.

### 4.1 AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL

Apresenta-se aqui a metodologia utilizada para se obterem os resultados experimentais que serão comparados com os resultados calculados pelos modelos acústicos viscotérmicos nas próximas seções deste capítulo.

#### 4.1.1 Aparato Experimental

Os tubos que foram avaliados são de materiais metálicos, sendo o tubo simples feito de alumínio com aproximadamente 0,4 mm de espessura de parede e o tubo com variação de seção feito em aço inoxidável com aproximadamente 0,6 mm de espessura de parede. As geometrias destes tubos serão apresentadas nas próximas seções deste capítulo.

Os testes foram realizados em uma câmara anecoica a uma temperatura de aproximadamente 20 °C, sendo que as propriedades do ar utilizadas nas análises estão apresentadas na Tabela 4.1.

Para as medições foram utilizados os seguintes equipamentos:

- dois microfones 1/2" de campo difuso pré-polarizados;
- um alto-falante convencional;
- um amplificador de potência B&K 2706;



difícil acesso ou em locais onde a dimensão do microfone gera interferência no campo acústico.

As ponteiros utilizadas nos experimentos possuem as dimensões apresentadas na Figura 4.2 e são posicionadas em relação ao tubo analisado conforme a Figura 4.3. O efeito destas ponteiros na medição será corrigido através de uma calibração que será apresentada na Seção 4.1.3.

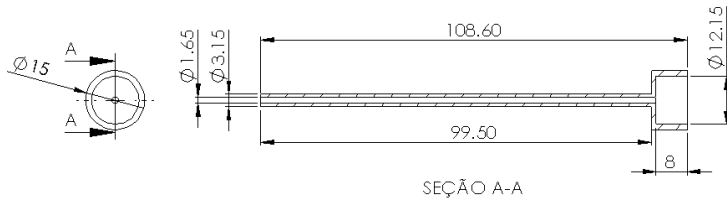


Figura 4.2: Dimensões (em milímetros) das ponteiros utilizadas nos experimentos.

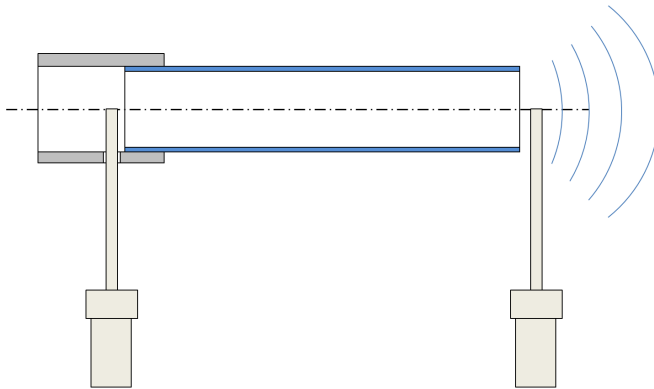


Figura 4.3: Posição das ponteiros em relação ao tubo analisado.

A conexão do alto-falante ao tubo é feita através de uma mangueira onde coloca-se a primeira ponteira através de um furo próximo à entrada do tubo. A segunda ponteira é colocada próximo à saída do tubo que fica aberta para o ambiente.

### 4.1.2 Procedimento experimental

Este procedimento experimental visa obter uma relação entre as pressões acústicas medidas nas extremidades dos tubos analisados através de uma função de transferência  $H(f)$  dada por

$$H(f) = \frac{P_2(f)}{P_1(f)}, \quad (4.1)$$

sendo  $P_1(f)$  e  $P_2(f)$  os espectros de pressão acústica medidos nos respectivos microfones dispostos na Figura 4.1.

A função de transferência é obtida experimentalmente através do autoespectro do sinal no microfone 1 ( $S_{11}(f)$ ) e do espectro cruzado dos sinais nos microfones 1 e 2 ( $S_{12}(f)$ ), sendo dada por

$$H(f) = \frac{S_{12}(f)}{S_{11}(f)}. \quad (4.2)$$

Para execução do experimento, é gerado um sinal de ruído branco de forma a excitar toda faixa de frequência analisada. Durante a medição de  $H(f)$ , monitora-se a função coerência que mede a correlação entre os sinais de pressão medidos e apresenta valores entre 0 e 1. Valores de coerência próximos à 1.0 indicam que os sinais possuem correlação, indicando uma boa qualidade da medição.

Na Figura 4.4 apresentam-se as curvas da função coerência obtidas nas medições dos tubos que serão analisados nas próximas seções deste capítulo. As medições foram realizadas em uma câmara anecoica e apresentaram valores da função coerência satisfatórios para as análises.

### 4.1.3 Calibração das ponteiras

As duas ponteiras utilizadas possuem geometrias muito próximas entre si tal que seus efeitos sobre o ensaio são praticamente anulados ao medir-se a função de transferência  $H(f)$ . Para anular efeitos residuais devido às imperfeições geométricas das ponteiras faz-se uma calibração das mesmas para a correção dos dados medidos.

A calibração é feita de forma relativa através da medição de uma função de transferência de calibração  $H(f)_{\text{calibração}}$ . Para isto, coloca-se uma ponteira em frente à outra para medir a pressão acústica próxima do mesmo ponto conforme a Figura 4.5 e o procedimento

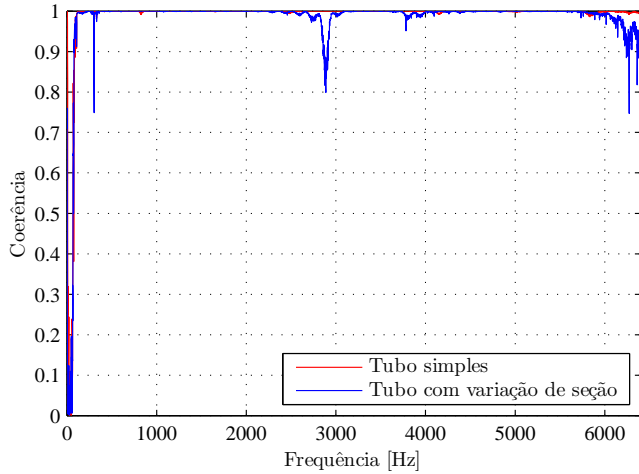


Figura 4.4: Curvas da função coerência entre os sinais medidos na  $H(f)$ .

descrito em [44]. Desta forma, a função de transferência corrigida será obtida por

$$H(f)_{corrigida} = \frac{H(f)_{medida}}{H(f)_{calibração}}. \quad (4.3)$$

A Figura 4.6 apresenta os espectros de magnitude e fase da  $H(f)_{calibração}$ . Os espectros mostram a influência das ponteiros na medição das funções de transferência. Caso não houvesse influência das ponteiros, o espectro de magnitude de  $H(f)$  seria um valor constante e igual a 1.0 [Pa/Pa] e o espectro da fase seria constante e igual a zero. Os picos apresentados nos espectros se devem a possibilidade de pequenas diferenças geométricas entre as ponteiros.



Figura 4.5: Posicionamento dos ponteiros para calibração [44].

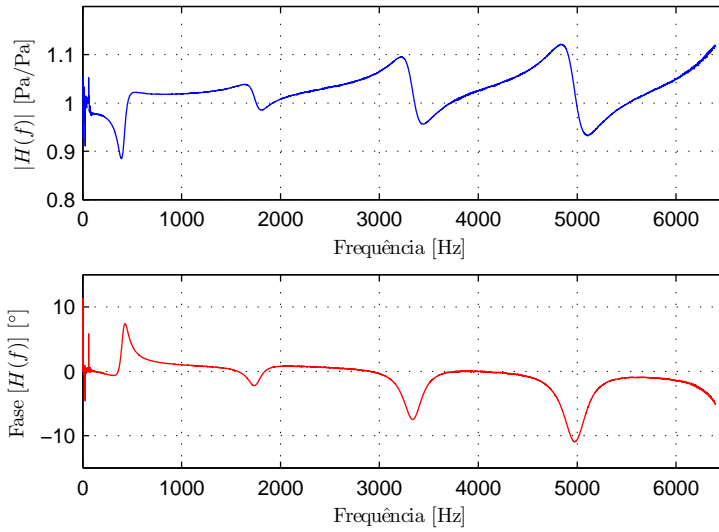


Figura 4.6: Curvas de amplitude e fase da  $H(f)$  de calibração das ponteiros.



## 4.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para construção dos modelos acústicos das geometrias tubulares avaliadas pelo aparato experimental apresentado, serão assumidas as seguintes condições de contorno aos modelos acústicos viscotérmicos avaliados.

- Paredes dos tubos rígidas e isotérmicas com velocidades nulas;
- Pressão acústica unitária e condição adiabática na extremidade do microfone 1;
- Impedância de radiação e condição adiabática na extremidade do microfone 2.

A impedância aplicada em uma extremidade do tubo é a impedância de radiação de um tubo aberto e não-flangeado que é calculada por [39]

$$\tilde{Z}_{rad} = \rho_0 c_0 \left[ \frac{1}{4} (ka)^2 + i 0,6133(ka) \right], \quad (4.4)$$

sendo  $a$  o raio do tubo.

A impedância apresentada pela Eq. (4.4) é uma aproximação para valores de  $ka \ll 1$ . O tubo simples será avaliado até a frequência de 3000 Hz ( $ka = 0,24$ ) e o tubo com variação de seção será avaliado até a frequência de 6000 Hz ( $ka = 0,48$ ). Apesar dos valores máximos de  $ka$  nas análises não estarem dentro da faixa de aproximação de  $\tilde{Z}_{rad}$ , os resultados calculados ainda são satisfatórios.

## 4.3 TUBO SIMPLES

Como primeira aplicação, será analisada a propagação acústica em um tubo simples com a geometria da Figura 4.7.

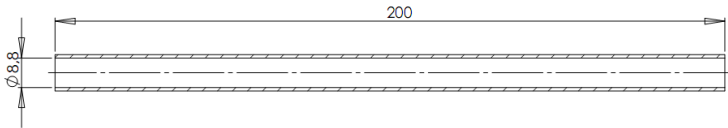


Figura 4.7: Geometria do tubo simples (dimensões em milímetros).

### 4.3.1 Modelo LRF analítico

Para solucionar o modelo LRF analiticamente, as condições de contorno assumidas na Seção 4.2 são aplicadas conforme a Figura 4.8.

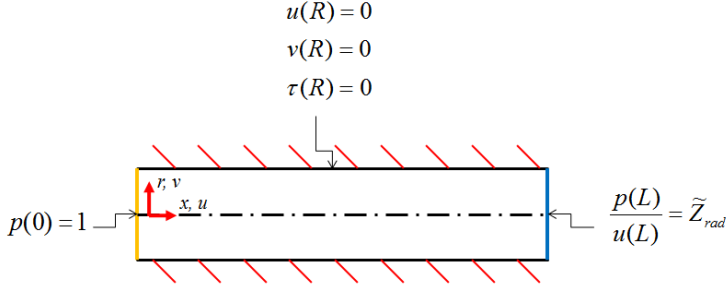


Figura 4.8: Condições de contorno aplicadas ao tubo simples.

A modelagem analítica para tubos cilíndricos é apresentada na Seção 2.3.1. Nesta seção, calcula-se uma constante de propagação  $\Gamma$  através das mesmas condições de contorno utilizadas nas paredes do tubo:  $u(R) = v(R) = \tau(R) = 0$ . A constante de propagação possui papel importante para solução da Eq. (3.1), que tem a seguinte solução escrita na forma dimensional:

$$p(x) = P_0(\tilde{A}e^{\Gamma kx} + \tilde{B}e^{-\Gamma kx}), \quad (4.5)$$

onde  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  são constantes complexas que serão determinadas pelas condições de contorno nas extremidades do tubo.

Como também mostrado na Seção 2.3.1, as outras variáveis do modelo LRF são dependentes da pressão acústica. Desta forma, a solução para velocidade de partícula na direção axial do tubo que é dada pela Eq. (2.17) é escrita da seguinte forma dimensional:

$$u(x, r) = \frac{i\Gamma c_0}{\gamma} \left[ 1 - \frac{J_0(i^{3/2} \frac{r}{R} s)}{J_0(i^{3/2} s)} \right] (\tilde{A}e^{\Gamma kx} - \tilde{B}e^{-\Gamma kx}). \quad (4.6)$$

A condição de contorno  $\tilde{Z}_{rad}$  dada pela Eq. (4.4) foi determinada a partir do modelo acústico clássico onde a impedância característica do meio é igual a  $(\rho_0 c_0)$ . A impedância característica do meio no modelo LRF é obtida através da velocidade média de  $u(x, r)$  em relação a  $r$

que é dada por

$$\begin{aligned}\bar{u}(x) &= \frac{\int_0^R u(x, r) dr}{\int_0^R \frac{1}{R} dr} = -\frac{i\Gamma c_0}{\gamma} \left[ \frac{J_2(i^{3/2}s)}{J_0(i^{3/2}s)} \right] (\tilde{A}e^{\Gamma kx} - \tilde{B}e^{-\Gamma kx}) \\ &= \frac{G}{\rho_0 c_0} P_0(\tilde{A}e^{\Gamma kx} - \tilde{B}e^{-\Gamma kx}),\end{aligned}\quad (4.7)$$

sendo

$$G = -i\Gamma \left[ \frac{J_2(i^{3/2}s)}{J_0(i^{3/2}s)} \right]. \quad (4.8)$$

O termo  $(\rho_0 c_0)/G$  é a impedância característica do meio corrigida devido ao perfil de velocidade gerado pelos efeitos viscotérmicos [41].

Portanto, para aplicar a impedância de radiação ao tubo utilizando o modelo LRF, a impedância de cada meio foi normalizada pela respectiva impedância característica de acordo com a seguinte expressão:

$$\frac{\tilde{Z}_{rad}}{(\rho_0 c_0)} = \frac{G}{(\rho_0 c_0)} \frac{p(L)}{\bar{u}(L)}. \quad (4.9)$$

Com a aplicação das condições de contorno nas extremidades do tubo, tem-se o seguinte sistema de equações:

1. Em  $x = 0$ :

$$P_0(\tilde{A} + \tilde{B}) = 1. \quad (4.10)$$

2. Em  $x = L$ :

$$\frac{\tilde{Z}_{rad}}{(\rho_0 c_0)} = \frac{(\tilde{A}e^{\Gamma kL} + \tilde{B}e^{-\Gamma kL})}{(\tilde{A}e^{\Gamma kL} - \tilde{B}e^{-\Gamma kL})}. \quad (4.11)$$

O sistema de equações lineares acima é resolvido para frequências discretas onde determina-se as constantes complexas  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ . Com as constantes determinadas, retorna-se à Eq. (4.5) onde pode-se calcular a pressão acústica em qualquer ponto do tubo e obtém-se a função de transferência  $H(f)$ .

### 4.3.2 Modelos NSFL

As formulações FEM para o modelo NSFL apresentadas na Seção 3.3 foram aplicadas ao tubo simples. Foram utilizados elementos bidimensionais com coordenadas cilíndricas e uma condição de simetria axial devido ao menor custo computacional para a solução.

As condições de contorno mecânicas e térmicas na parede do tubo são aplicadas aos modelos NSFL através das seguintes condições:

$$\mathbf{g}_M = \mathbf{0} \text{ (vetor velocidade de partícula nula);} \quad (4.12)$$

$$g_T = 0 \text{ (temperatura acústica nula).} \quad (4.13)$$

A condição de simetria é aplicada através das condições de:

$$(\mathbf{g}_M \cdot \mathbf{n}) = 0 \text{ (velocidade de partícula normal nula);} \quad (4.14)$$

$$h_T = 0 \text{ (condição adiabática).} \quad (4.15)$$

Na entrada do tubo, aplicam-se as condições de:

$$(\mathbf{h}_M \cdot \mathbf{n}) = 1 \text{ (tensão normal unitária);} \quad (4.16)$$

$$h_T = 0 \text{ (condição adiabática).} \quad (4.17)$$

Na saída do tubo, aplicam-se as condições de:

$$(\mathbf{h}_M \cdot \mathbf{n}) = \tilde{Z}_{rad} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \text{ (tensão normal);} \quad (4.18)$$

$$h_T = 0 \text{ (condição adiabática).} \quad (4.19)$$

As condições de contorno mecânicas nas extremidades do tubo são aplicadas como condições não-essenciais. A pressão unitária e a impedância de radiação são aplicadas através das respectivas tensões normais conforme apresentado por [46]. As condições de contorno aplicadas na formulação fraca podem ser visualizadas na Figura 4.9.

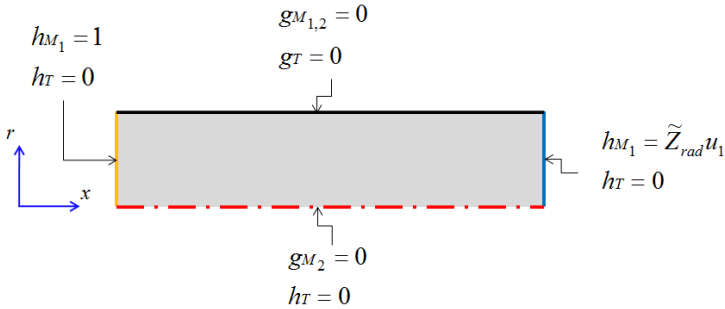


Figura 4.9: Condições de contorno dos modelos NSFL aplicadas ao tubo simples.

A discretização da geometria foi feita com elementos retangulares

da forma apresentada na Figura 4.10. Para solucionar o modelo de forma adequada, a malha de elementos precisa de um refino próximo à parede do tubo. Além de uma discretização mais refinada, as funções de forma dos elementos são quadráticas para representar apropriadamente a velocidade de partícula e temperatura acústica. Na formulação mista, a inclusão da pressão acústica com funções de forma lineares tornam o sistema numericamente estável conforme o procedimento proposto por [13].

As características do modelo numérico NSFL propiciam um custo computacional muito maior do que os modelos acústico clássico e LRF para solução. No entanto, um estudo da discretização para o modelo NSFL será apresentado no Capítulo 5 para avaliar discretizações apropriadas para a solução eficiente da formulação FEM.

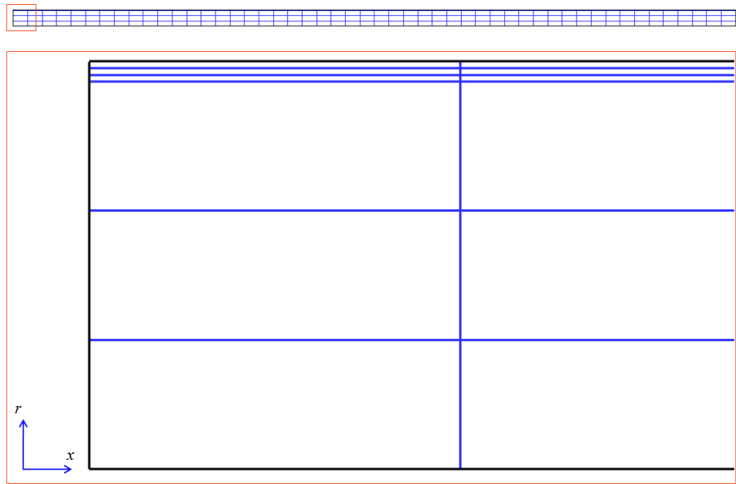


Figura 4.10: Malha 2D do tubo simples para a solução dos modelos NSFL.

A implementação das formulações FEM do modelo NSFL foram realizadas por meio da aplicação da formulação fraca no código comercial Comsol 3.5a [34]. Neste código foram escolhidas as funções de forma para cada variável dependente no sistema de equações junto com a respectiva função ponderação da aproximação de Galerkin. O processo de construção e montagem do elemento é feito automaticamente pelo código. No Comsol, foi escolhido um algoritmo de solução direta chamado PARDISO. Este algoritmo é indicado para solução de sistemas lineares com matrizes simétricas com maior velocidade [46].

O sistema de equações foi solucionado para cada frequência discreta no intervalo de 100 Hz a 3000 Hz com o passo de frequência de 10 Hz. Esta faixa de frequência foi escolhida de forma a obter as menores frequências incluindo três ressonâncias do sistema onde os efeitos viscotérmicos serão mais pronunciados para este diâmetro de tubo.

Os resultados calculados pelos modelos NSFL foram obtidos na entrada e saída do tubo, na região mais próxima possível do local onde o sensor foi posicionado na avaliação experimental.

### 4.3.3 Resultados

Na Figura 4.11, apresenta-se a magnitude da função de transferência  $H(f)$  obtida com a formulação irredutível do modelo NSFL. Na comparação dos resultados obtidos entre os modelos NSFL e LRF, observa-se uma grande convergência dos modelos.

A instabilidade numérica mencionada na Seção 3.3.1 é constatada na Figura 4.11 onde há uma pequena variação em relação ao modelo LRF na faixa de frequência abaixo de 500 Hz. A instabilidade numérica é quase imperceptível pois a malha retangular utilizada (ver Figura 4.10) acabou por favorecer a diminuição do efeito de travamento da malha. Esta instabilidade numérica será mais pronunciada na segunda geometria avaliada neste capítulo.

A comparação dos modelos viscotérmicos com o modelo acústico clássico mostra que a acústica clássica representou o comportamento do tubo com menor precisão que os modelos viscotérmicos apresentando grandes erros nas ressonâncias do sistema como pode se visualizar nas Figuras 4.11 e 4.12. Apesar das diferenças entre os resultados calculados e medidos, os valores calculados pelos modelos viscotérmicos se mostram mais próximos aos dados experimentais.

A comparação da magnitude de  $H(f)$  obtida com a formulação mista do modelo NSFL e o modelo LRF está apresentada na Figura 4.12 onde os resultados obtidos apresentaram uma concordância perfeita.

A distribuição da pressão acústica, calculada pelo modelo NSFL nas frequências de ressonância do tubo simples, estão apresentadas na Figura 4.13. Nesta figura pode-se visualizar que a pressão acústica é praticamente constante na direção radial. A pressão acústica constante na direção radial do tubo (ou na direção transversal de outras geometrias) é assumida nos modelos LRF e se mostra muito razoável diante dos resultados obtidos nas Figuras 4.11 e 4.12.

A distribuição da magnitude de temperatura acústica (em 1680

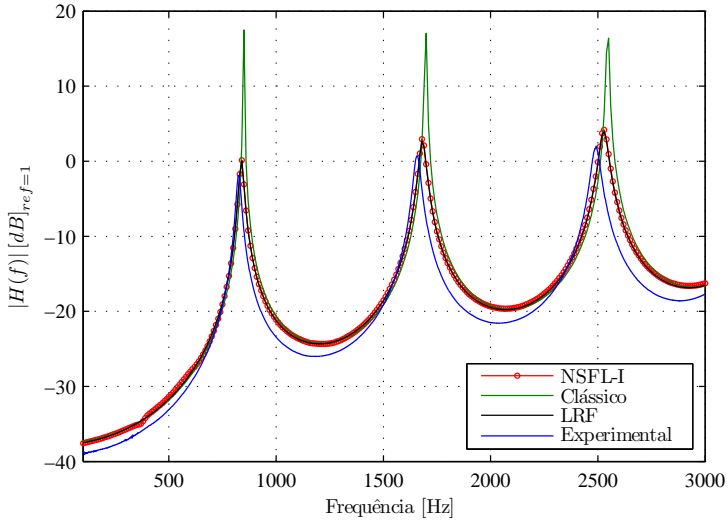


Figura 4.11: Magnitude de  $H(f)$  para o tubo simples calculada com o modelo numérico NSFL com formulação irreduzível.

Hz) na região próxima ao meio do tubo ( $x = 0,1$  m) pode ser visualizada na Figura 4.14. Nesta figura observa-se que a temperatura acústica, que é praticamente constante no centro do tubo ( $r = 0$ ), possui uma grande variação na parede ( $r = 4,4 \times 10^{-3}$  m) onde há a condição de contorno isotérmica ( $\tau = 0$ ).

Para melhor visualização e comparação dos modelos NSFL com o modelo LRF foram obtidos perfis de magnitude ao longo da linha tracejada na Figura 4.14. Nas Figuras 4.15 e 4.16 estão apresentados, respectivamente, os perfis de magnitude de velocidade de partícula axial e de temperatura acústica nas frequências de ressonância do tubo (em  $x = 0,1$  m). Nestas comparações pode-se perceber que os perfis se tornam mais suaves e semelhantes aos perfis do modelo LRF analítico nas frequências maiores. Este fato se deve a malha adotada para solução dos modelos NSFL (ver Figura 4.10). Esta malha possui pouca quantidade de elementos na região da camada limite nas frequências mais baixas ocasionando uma menor convergência da solução numérica por Elementos Finitos. Uma avaliação da discretização da camada limite será apresentada no Capítulo 5.

Pode-se notar também que a formulação irreduzível apresenta maiores instabilidades do que a formulação mista nos perfis calculados.

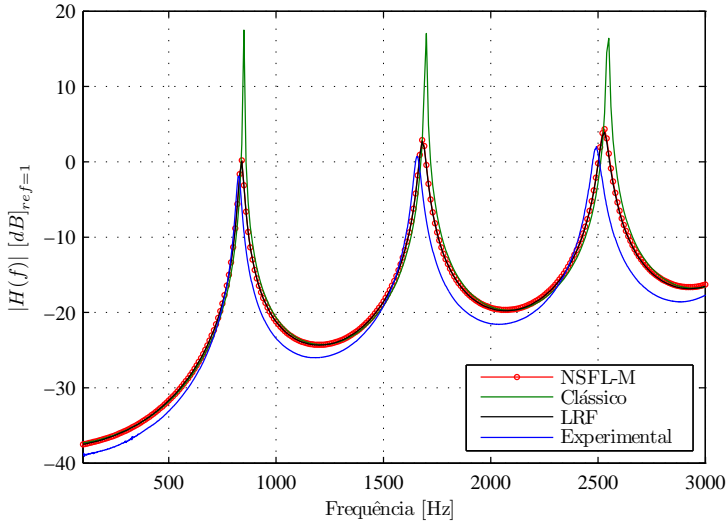


Figura 4.12: Magnitude de  $H(f)$  para o tubo simples calculada com o modelo numérico NSFL com formulação mista.

Este fato evidencia a presença do efeito de travamento que não foi muito pronunciado nos resultados da magnitude de pressão acústica (ver Figura 4.11).

Apesar das diferenças apresentadas nos perfis de magnitude calculados pelos modelos NSFL, os resultados para a pressão acústica se mostram muito próximos do modelo LRF e dos dados experimentais. As diferenças obtidas entre os dados experimentais e os modelos viscotérmicos apresentados nas Figuras 4.11 e 4.12 se devem ao posicionamento dos sensores e serão investigadas com mais profundidade no Capítulo 6.



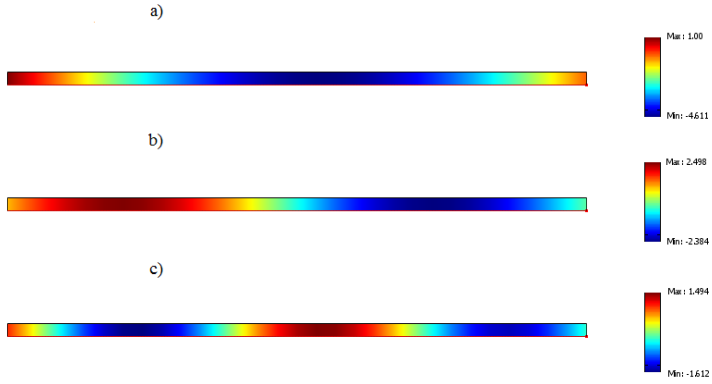


Figura 4.13: Distribuição da pressão acústica calculadas pelos modelos NSFL nas frequências de ressonância: a) 840 Hz, b) 1680 Hz e c) 2530 Hz.

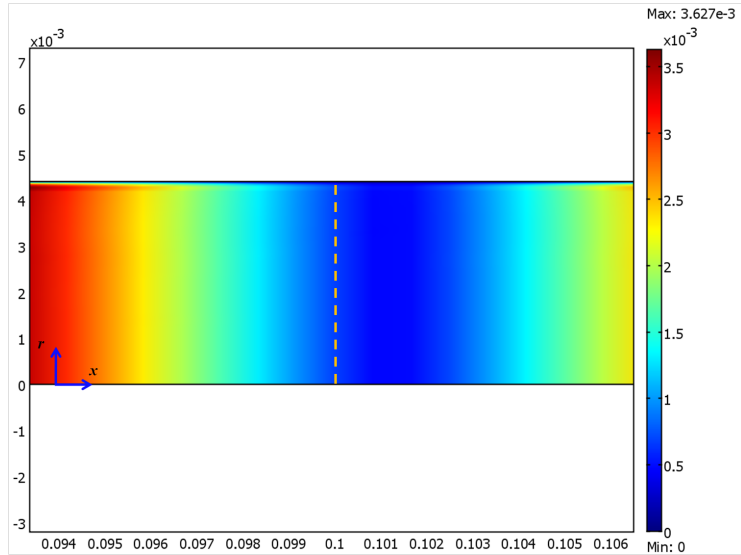


Figura 4.14: Distribuição da magnitude de temperatura acústica calculada pelo modelo NSFL (formulação mista) na frequência de 1680 Hz.

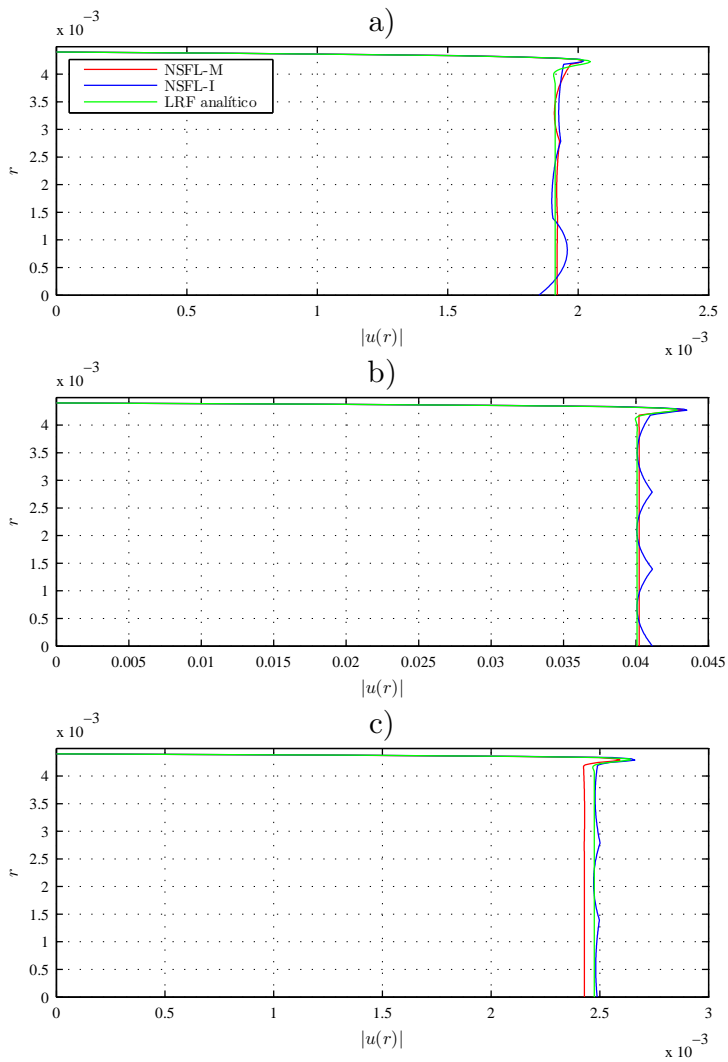


Figura 4.15: Perfil da magnitude de velocidade de partícula axial calculados pelos modelos NSFL nas frequências de ressonância: a) 840 Hz, b) 1680 Hz e c) 2530 Hz.

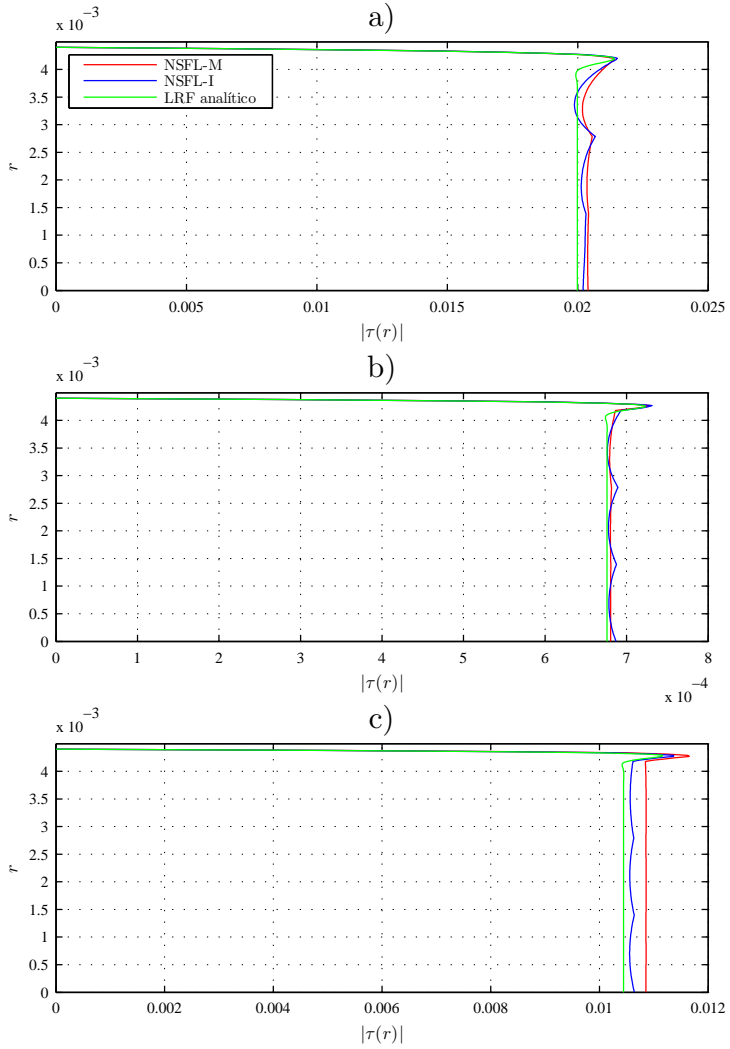


Figura 4.16: Perfil da magnitude de temperatura acústica calculados pelos modelos NSFL nas frequências de ressonância: a) 840 Hz, b) 1680 Hz e c) 2530 Hz.

#### 4.4 TUBO COM VARIAÇÃO DE SEÇÃO

Com o intuito de avaliar a capacidade de convergência dos modelos acústicos viscotérmicos aplicados em geometrias mais complexas, foi construída e avaliada uma amostra com a geometria da Figura 4.17. Esta geometria permite avaliar a capacidade dos modelos viscotérmicos para representar a dissipação acústica que a variação de seção irá impor ao sistema. Esta amostra foi avaliada experimentalmente da mesma forma apresentada na Seção 4.1.

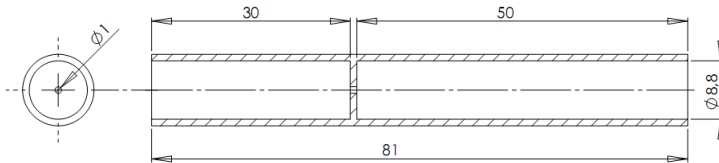


Figura 4.17: Geometria do tubo com variação de seção (dimensões em milímetros).

##### 4.4.1 Modelo LRF

Devido à variação brusca de seção na geometria avaliada, a solução do modelo LRF será obtida por uma formulação FEM ao invés da formulação analítica utilizada na seção anterior. A formulação analítica não pode ser utilizada pois a propagação da onda acústica na geometria deste sistema não será completamente unidimensional. Na transição de seção no tubo o perfil plano da onda se deforma devido à expansão brusca da seção transversal. Esta característica provoca erros se o modelo for solucionado de forma analítica (unidimensional).

Como apresentado na Seção 3.2, a formulação FEM para o modelo LRF resulta na solução de uma equação semelhante à formulação para acústica clássica. Portanto, pode-se calcular a constante de propagação  $\Gamma$  para cada trecho com seção transversal constante do tubo da Figura 4.17 através da Eq. (2.23) e inserir na formulação FEM para acústica clássica através de uma velocidade do som complexa calculada pela Eq. (3.24). A constante de propagação contabiliza a dissipação acústica devido aos efeitos viscotérmicos presentes em cada trecho do tubo com variação de seção.

Para esta solução numérica foram adotados elementos da formu-

lação acústica clássica bidimensionais em coordenadas cilíndricas e com funções de forma quadráticas que possuem melhor convergência que as funções de forma lineares sem a necessidade de uma grande quantidade de elementos.

Os valores de  $\Gamma$  foram aplicados conforme o diâmetro da respectiva região do tubo apresentada na Figura 4.18 juntamente com as condições de contorno aplicadas.

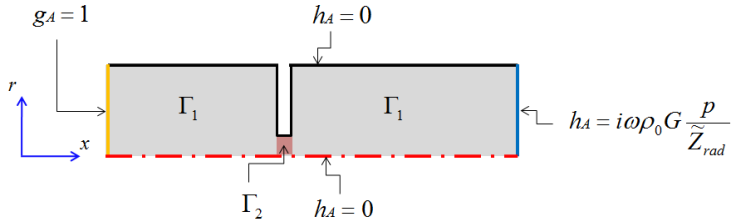


Figura 4.18: Condições de contorno do modelo LRF aplicadas ao tubo com variação de seção.

#### 4.4.2 Modelo NSFL

Assim como o tubo simples, os modelos NSFL aplicados ao tubo com variação de seção também foram solucionados com elementos bidimensionais com as mesmas funções de forma. Para solução dos modelos NSFL aplicam-se as condições de contorno conforme a Figura 4.19.

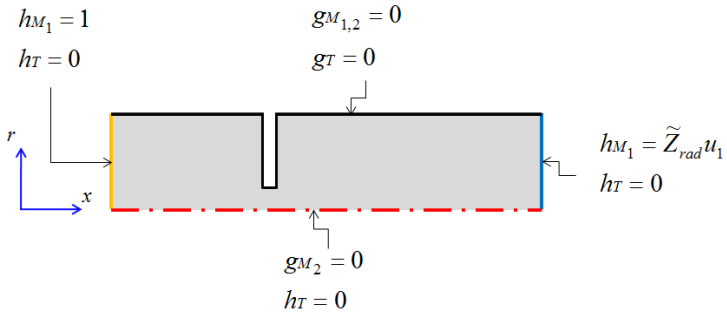


Figura 4.19: Condições de contorno dos modelos NSFL aplicadas ao tubo com variação de seção.

Devido à variação de seção, foi adotada uma malha de elementos com maior refino tanto na proximidade das paredes quanto próximo da variação de seção, como mostrado na Figura 4.20.

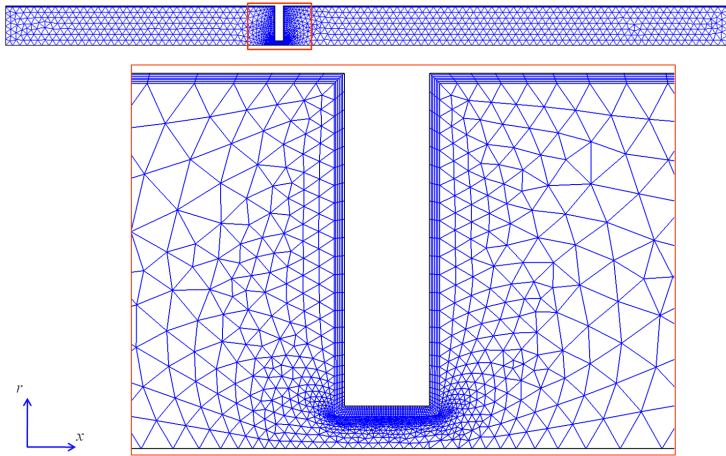


Figura 4.20: Malha 2D do tubo com variação de seção para a solução dos modelos NSFL.

#### 4.4.3 Resultados

Na Figura 4.21, apresenta-se o resultado calculado pelo modelo LRF solucionado de forma numérica. Assim como no tubo simples, a comparação do modelos LRF com o modelo acústico clássico apresentou diferenças, principalmente, no nível de magnitude. Pode-se visualizar também que os resultados calculados pelos modelos acústicos apresentaram diferenças significativas em relação aos dados experimentais. Nesta comparação, pode-se visualizar que os espectros calculados apresentam um deslocamento na segunda frequência natural do sistema.

Os resultados obtidos pela formulação irreduzível do modelo NSFL estão mostrados na Figura 4.22. A instabilidade da formulação irreduzível se apresentou de forma muito mais clara para a malha adotada na Figura 4.20. O efeito de travamento se mostrou nas baixas frequências onde os efeitos viscotérmicos são maiores. Nas frequências mais altas, a magnitude aproxima-se mais dos resultados calculados pelo modelo LRF, porém as instabilidade ainda se apresentam.

Os resultados obtidos pela formulação mista do modelo NSFL

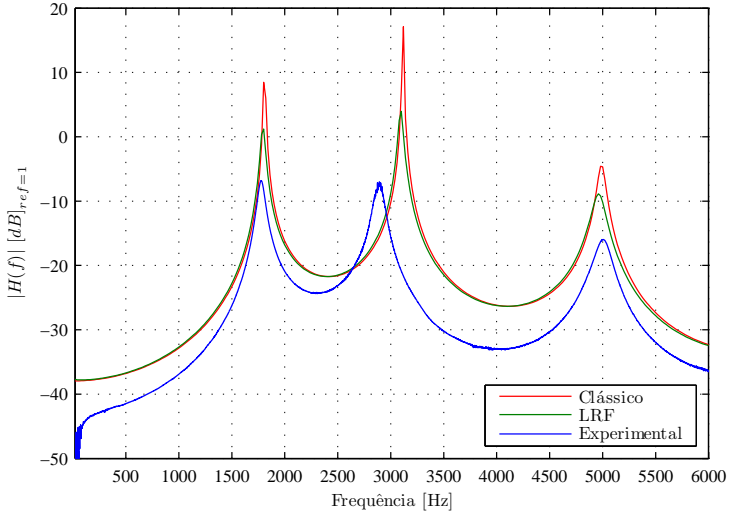


Figura 4.21: Magnitude de  $H(f)$  para o modelo LRF numérico.

estão mostrados na Figura 4.23. Nesta figura, pode-se constatar a estabilidade numérica proporcionada pela formulação mista do modelo NSFL. Na comparação do modelo NSFL com o modelo LRF, pode-se observar que o modelo NSFL apresentou resultados mais próximos dos dados experimentais.

As diferenças entre os resultados calculados e medidos apresentadas nas Figuras 4.21 a 4.23 se devem à posição real dos sensores na análise experimental. O efeito da posição dos sensores nos resultados calculados serão investigados no Capítulo 6.

Nas Figuras 4.25 a 4.27 são apresentadas as distribuições da velocidade de partícula (axial e radial) e temperatura acústica calculadas pelo modelo NSFL (formulação mista) na frequência da segunda ressonância do sistema. Na transição da seção transversal pode-se observar os seguintes aspectos:

- Variação brusca do perfil de velocidade de partícula axial (ver Figura 4.25);
- Magnitudes de velocidade de partícula radial comparáveis a velocidade de partícula axial (ver Figuras 4.25 e 4.26);
- Variação da temperatura acústica na região destacada na Figura 4.27 devido a condição de contorno isotérmica da parede.

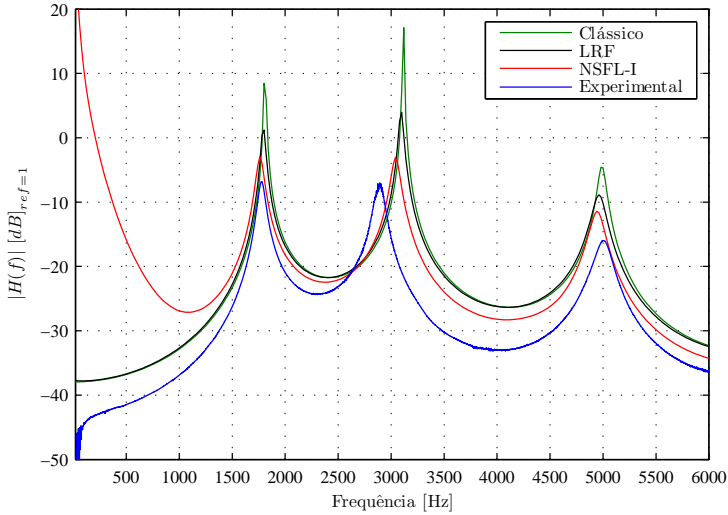


Figura 4.22: Magnitude de  $H(f)$  calculada com o modelo numérico NSFL com formulação irredutível.

O modelo numérico LRF inclui a dissipação acústica em cada região do domínio através das constantes de propagação  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  conforme a Figura 4.18. As constantes de propagação são calculadas considerando os perfis de velocidade de partícula axial e de temperatura acústica que são calculados analiticamente. Como no cálculo analítico dos perfis de velocidade de partícula axial e temperatura acústica considera-se a seção transversal constante, os aspectos listados acima não são considerados no modelo LRF. Estes aspectos contribuem para uma dissipação adicional da energia acústica que se traduz em menores valores da magnitude de  $H(f)$  conforme apresentado na Figura 4.23.



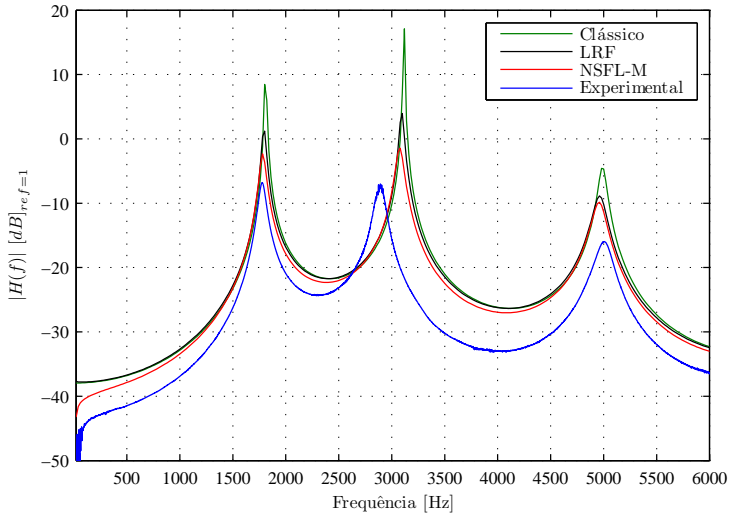


Figura 4.23: Magnitude de  $H(f)$  calculada com o modelo numérico NSFL com formulação mista.

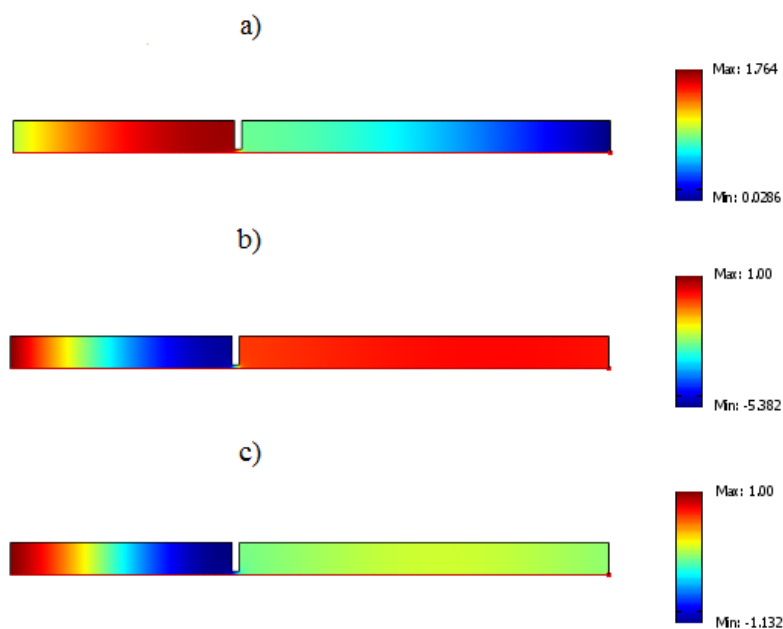


Figura 4.24: Distribuição da pressão acústica calculadas pelos modelos NSFL nas frequências de ressonância: a) 1780 Hz, b) 3080 Hz e c) 4960 Hz.

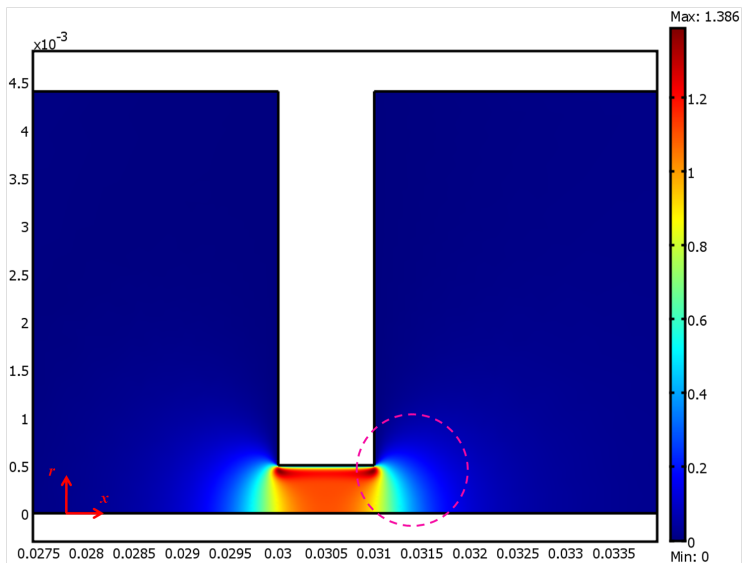


Figura 4.25: Magnitude de velocidade axial (em 3080Hz) calculada pelo modelo NSFL.

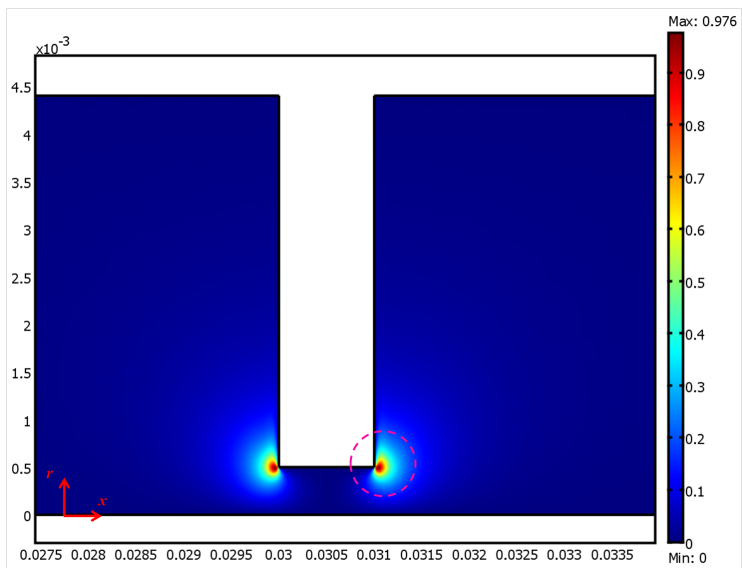


Figura 4.26: Magnitude de velocidade radial (em 3080Hz) calculada pelo modelo NSFL.

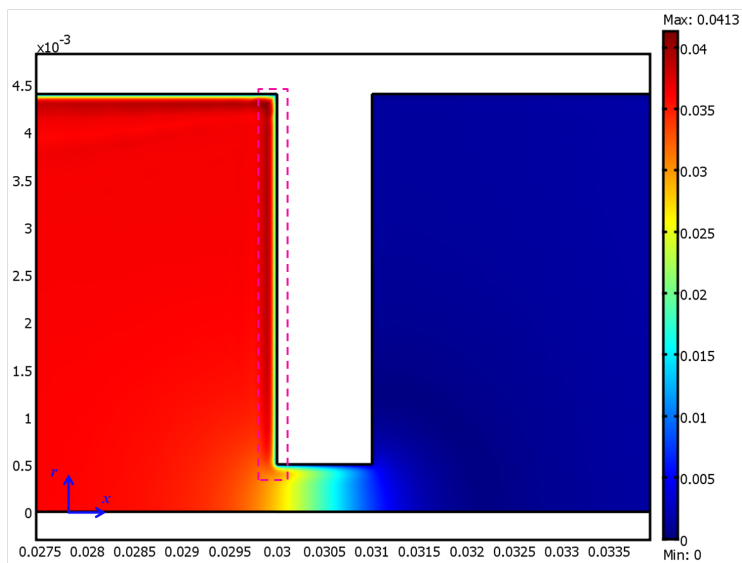


Figura 4.27: Magnitude da temperatura acústica (em 3080Hz) calculada pelo modelo NSFL.

## 5 DISCRETIZAÇÃO PARA OS MODELOS NSFL

Para solução do modelo NSFL, as formulações FEM possuem de três a cinco variáveis dependentes, sendo que a maioria são aproximadas por funções quadráticas que, conseqüentemente, aumentam o número de graus de liberdade dos elementos finitos. Além disso, a discretização do sistema deve ser mais refinada devido aos grandes gradientes de velocidades e de temperatura acústica próximos às paredes do sistema. Conseqüentemente, a solução numérica do modelo NSFL possui um custo computacional muito maior do que as formulações FEM dos modelos acústico clássico e LRF.

A escolha de uma discretização apropriada pode melhorar a convergência e reduzir o tempo de processamento dos modelos NSFL. Como exemplo, adotando o caso do tubo simples analisado no capítulo anterior e as discretizações da Figura 5.1, pode-se mostrar a relação do custo computacional com as discretizações adotadas. Na Figura 5.1, os elementos das malhas 1, 2 e 3 são quadrados com tamanho de aresta iguais a 0,88 mm, 0,44 mm e 0,22 mm respectivamente. A malha 4 é igual a malha da Figura 4.10 que possui elementos retangulares com refino na região da camada limite próxima à parede do tubo.

Na Figura 5.2 pode-se comparar as curvas de magnitude de  $H(f)$  obtidas com as malhas da Figura 5.1 juntamente com os respectivos tempos de processamento. Tomando a solução analítica do modelo LRF como referência, pode-se visualizar que a convergência dos resultados com a solução analítica foi maior com a malha 4 do que com as malhas de elementos quadrados. Pode-se visualizar também que os resultados obtidos com as malhas de elementos quadrados tendem a solução analítica se a malha for mais refinada, porém o custo computacional para a solução será ainda maior. O tempo de processamento da solução para a malha 4 foi menor que as demais malhas da Figura 5.1, mostrando que esta forma de discretização pode ser muito vantajosa.

Neste capítulo busca-se avaliar a discretização mínima necessária para viabilizar a solução do modelo NSFL com menor custo computacional.

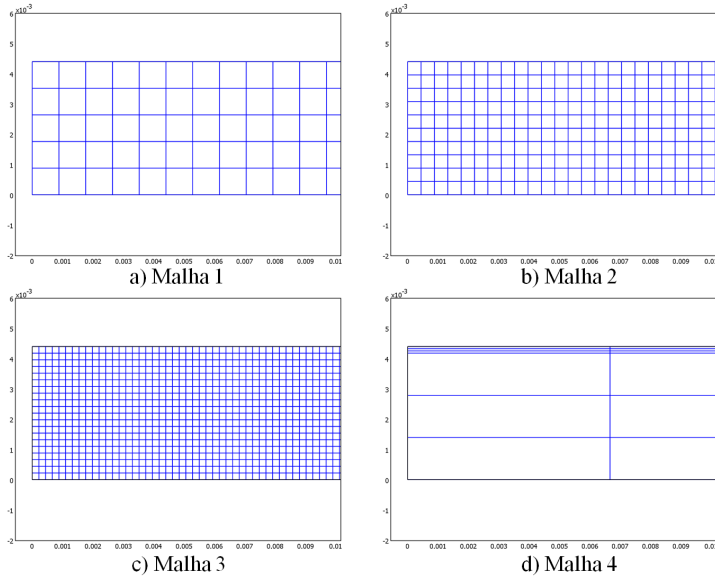


Figura 5.1: Malhas com elementos quadrados e retangulares avaliadas.

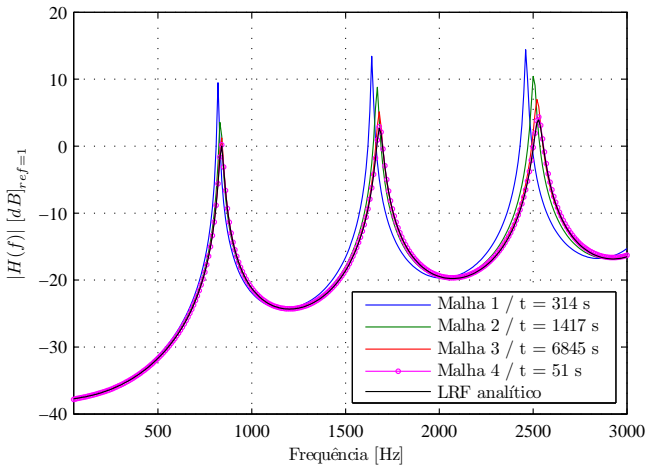


Figura 5.2: Comparação das curvas de magnitude de  $H(f)$  obtidas com as malhas da Figura 5.1.

## 5.1 METODOLOGIA DE ANÁLISE

Para esta análise foi utilizado como objeto de estudo a geometria e condições de contorno do tubo simples apresentado na Seção 4.3. Foram utilizados também os valores das soluções analíticas do tubo com modelo LRF que foram tomados como referência nesta análise. O modelo NSFL foi apenas solucionado com formulação mista pois possui maior estabilidade numérica para as diferentes discretizações que serão analisadas.

O estudo será feito com base na análise do espectro das funções erro de magnitude calculadas pelas seguintes expressões:

$$\epsilon_p(f) = \frac{||p(f)| - |p_{ref}(f)||}{|p_{ref}(f)|}, \quad (5.1)$$

onde  $|p|$  e  $|p_{ref}|$  são magnitudes da pressão acústica na saída do tubo, calculadas pelos modelos NSFL e LRF respectivamente;

$$\epsilon_{\bar{u}}(f) = \frac{||\bar{u}(f)| - |\bar{u}_{ref}(f)||}{|\bar{u}_{ref}(f)|}, \quad (5.2)$$

onde  $|\bar{u}|$  e  $|\bar{u}_{ref}|$  são médias espaciais da magnitude de velocidade de partícula axial na saída do tubo, calculadas pelos modelos NSFL e LRF respectivamente;

$$\epsilon_{\bar{\tau}}(f) = \frac{||\bar{\tau}(f)| - |\bar{\tau}_{ref}(f)||}{|\bar{\tau}_{ref}(f)|}, \quad (5.3)$$

onde  $|\bar{\tau}|$  e  $|\bar{\tau}_{ref}|$  são médias espaciais da magnitude de temperatura acústica na saída do tubo, calculadas pelos modelos NSFL e LRF respectivamente.

Os valores de referência  $p_{ref}$  e  $\bar{u}_{ref}$  são obtidos pelas soluções analíticas apresentadas nas Eqs. (4.5) e (4.7). O valor de referência  $\bar{\tau}_{ref}$  é obtido pela média em relação à  $r$  da solução analítica para temperatura dada por

$$\bar{\tau}(x) = \frac{\int_0^R \tau(x, r) dr}{\int_0^R \frac{1}{R} dr} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} T_0 \left[ \frac{J_2(i^{3/2} s \sigma)}{J_0(i^{3/2} s \sigma)} \right] (\tilde{A} e^{\Gamma k x} + \tilde{B} e^{-\Gamma k x}). \quad (5.4)$$

Inicialmente, utilizaram-se malhas bidimensionais, pois possuem menor custo computacional, facilitando a avaliação. Posteriormente, foram aplicadas malhas tridimensionais para análise e comparação. As discretizações analisadas serão descritas nas próximas seções.

### 5.1.1 Espessuras de camada limite

As regiões do fluido adjacentes às paredes do tubo apresentam-se grandes gradientes de velocidade de partícula e temperatura acústica. Estas regiões são normalmente chamadas de camada limite e seus valores de espessura são dependentes das propriedades do fluido e da frequência de excitação do sistema como pode ser visualizado nos perfis de magnitude da velocidade de partícula axial na Figura 5.3.

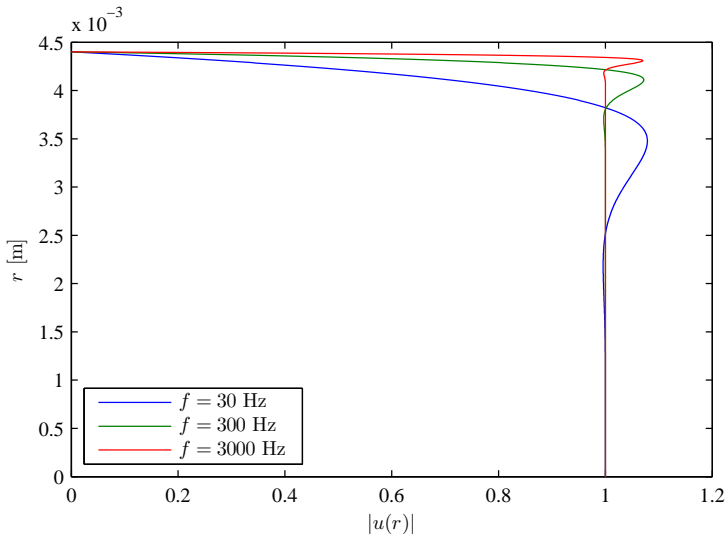


Figura 5.3: Perfis de magnitude da velocidade de partícula axial (normalizados).

Na Figura 5.3, o eixo vertical representa o raio do tubo onde no limite superior tem-se uma parede e no limite inferior tem-se o centro do tubo. No eixo horizontal tem-se os valores de amplitudes normalizadas pela respectiva amplitude no centro do tubo. Na parede pode-se visualizar que as amplitudes de velocidade de partícula são nulas e crescem na direção do centro do tubo conforme a frequência de excitação. Diante do comportamento da velocidade de partícula na região próxima à parede, necessita-se estabelecer um critério de discretização desta região que seja capaz de representar de forma apropriada o fenômeno físico.

As espessuras das camadas limites viscosa e térmica podem ser



determinadas pela solução de um modelo simplificado de fluido incompressível que move-se harmonicamente sobre uma superfície plana. Considerando que o fluido move-se apenas na direção  $x$  a solução da velocidade de partícula é escrita da seguinte forma [39]:

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \left[ e^{i\omega t} - e^{-\sqrt{\omega/2\nu}y} e^{i(\omega t - \sqrt{\omega/2\nu}y)} \right], \quad (5.5)$$

onde  $\nu = \mu/\rho_0$  é denominado viscosidade cinemática.

O primeiro termo da Eq. (5.5) representa a velocidade principal do fluido que é a velocidade fora da camada limite. O segundo termo representa a onda de cisalhamento que se configura em uma reação para cancelar a velocidade principal na superfície ( $y = 0$ ). A espessura da camada limite é definida em [39] como a distância da parede para a qual a velocidade de cisalhamento é igual  $e^{-1}$ , ou seja, quando a amplitude de velocidade de partícula decai 36,8% da velocidade principal. Nesta condição, a espessura da camada limite viscosa é calculada por

$$\delta_{visc} = \sqrt{\frac{2\mu}{\omega\rho_0}}. \quad (5.6)$$

De forma similar à velocidade de partícula, o perfil de temperatura acústica também pode ser obtido de forma simplificada e a camada limite térmica obtida por [39]

$$\delta_{term} = \frac{\delta_{visc}}{\sqrt{Pr}}. \quad (5.7)$$

O valor das camadas limites obtidas acima não compreendem totalmente a região de onde as grandes variações de velocidade de partícula e temperatura acústica acontecem (ver Figura 5.4). Portanto, foi adotada uma nova definição de camada limite para as análises. Esta nova camada limite viscosa é determinada como a distância da parede para a qual a velocidade de partícula decai 1% da velocidade principal do fluido. Desta forma, as novas camadas limites viscosa e térmica serão determinadas pelas seguintes expressões:

$$\delta'_{visc} = -\ln(1/100) \sqrt{\frac{2\mu}{\omega\rho_0}}, \quad (5.8)$$

$$\delta'_{term} = \frac{\delta'_{visc}}{\sqrt{Pr}}. \quad (5.9)$$

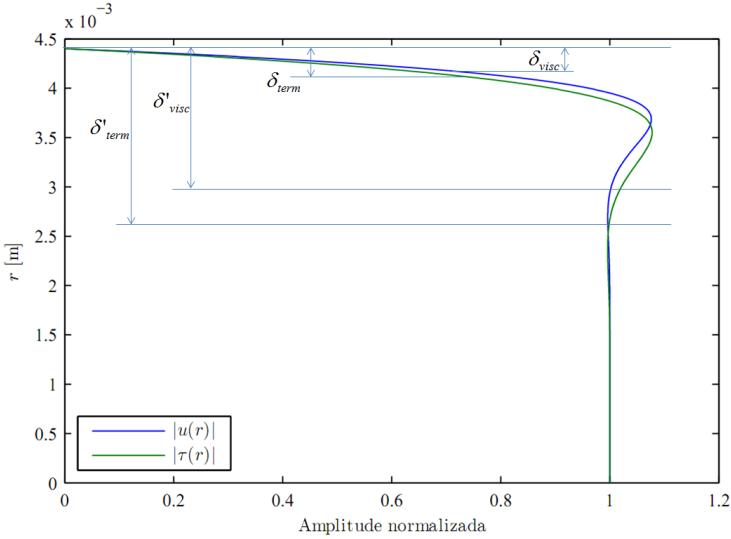


Figura 5.4: Magnitudes da velocidade de partícula axial e da temperatura acústica no tubo simples na frequência de 50Hz.

## 5.2 DISCRETIZAÇÃO 2D

### 5.2.1 Parametrização das malhas analisadas

Para analisar as discretizações, o domínio do tubo simples foi dividido em duas partes onde cada subdomínio será discretizado de forma diferente. Após a divisão dos subdomínios foram criados dois tipos de malhas diferentes onde os elementos são controlados pelos parâmetros apresentados nas Figuras 5.5 e 5.6.

O fato das camadas limites diminuïrem com o aumento da frequência torna a frequência máxima de análise um fator limitante para o tamanho dos elementos na camada limite. Para as análises aqui realizadas, a região da camada limite foi delimitada com a espessura da camada limite térmica  $\delta'_{term}$  avaliada na frequência máxima de análise  $f = 3000$  Hz.

A espessura da camada limite térmica foi escolhida por ser um pouco maior do que a camada limite viscosa (ver Figura 5.4), garantindo assim que as discretizações sejam efetivas para ambas as camadas.

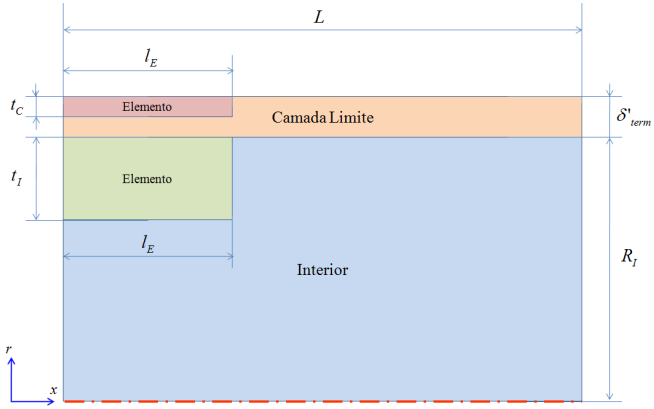


Figura 5.5: Parâmetros para discretização do tubo com a malha do tipo A.

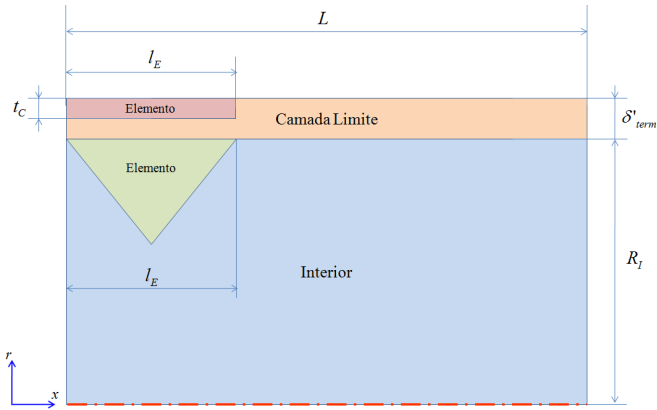


Figura 5.6: Parâmetros para discretização do tubo com a malha do tipo B.

## 5.2.2 Discretização da camada limite

### 5.2.2.1 Malhas analisadas

Para analisar a discretização da camada limite, foram utilizados os dois tipos de malhas apresentadas na Seção 5.2.1. As malhas no interior do tubo foram mantidas fixas enquanto as malhas na camada limite foram progressivamente incrementadas. Desta forma, pode-se avaliar isoladamente o efeito na discretização da camada limite.

As malhas foram construídas através dos parâmetros apresentados nas Figuras 5.5 e 5.6. Nas malhas do tipo A foram utilizados os parâmetros fixos:  $t_I = R_I/3$  e  $l_E = L/30$ , ou seja, três elementos na direção radial e trinta elementos na direção axial do tubo. Um exemplo desta malha está mostrado na Figura 5.7. Os parâmetros fixos foram obtidos após alguns testes iniciais onde se observou que o parâmetro  $l_E$  pode ser importante. Este parâmetro será avaliado na Seção 5.2.3.

Nas malhas do tipo B, utilizou-se o parâmetro fixo  $l_E = R_I/2$ . Neste tipo de malha o controle do tamanho dos elementos é menor devido à forma triangular dos elementos no interior. Um exemplo desta malha está mostrado na Figura 5.8.

As análises foram feitas variando apenas o parâmetro de espessura  $t_C$  dos elementos da camada limite.

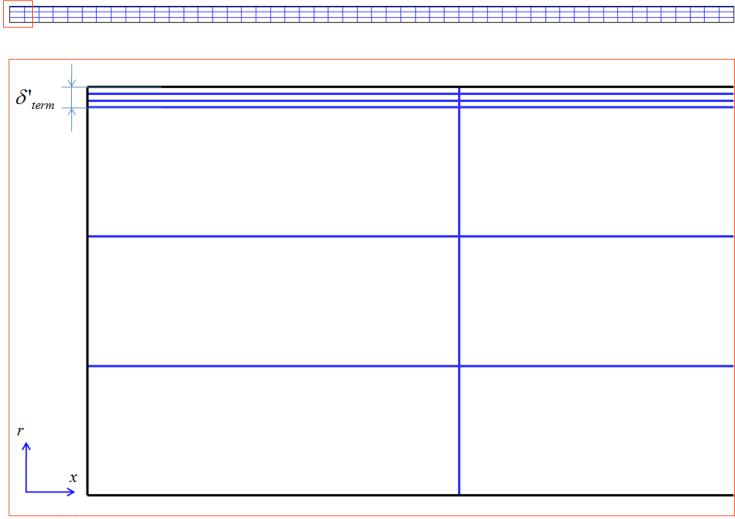


Figura 5.7: Malha tipo A com  $t_C = \delta'_{term}/3$ .

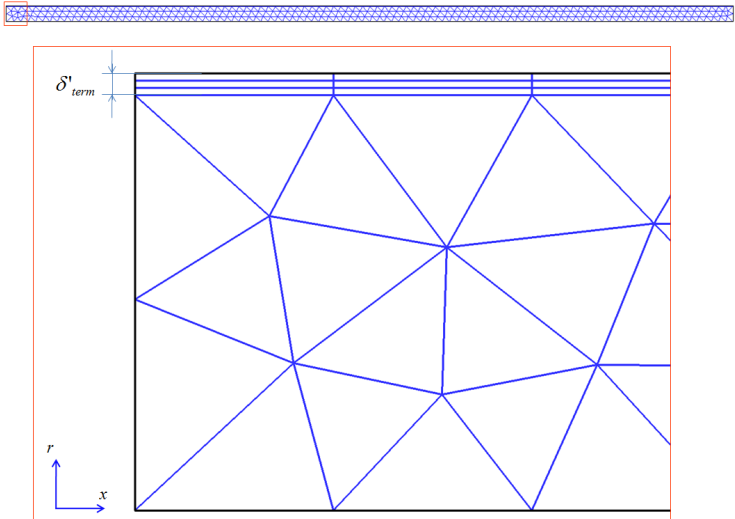


Figura 5.8: Malha tipo B com  $t_C = \delta'_{term}/3$ .

### 5.2.2.2 Resultados

Na avaliação das funções erro calculadas, percebe-se que os valores são mais pronunciados nas ressonâncias do sistema, sendo reduzidos à medida que aumenta-se a quantidade de elementos na espessura da camada limite. Este comportamento é esperado, pois os fenômenos dissipativos possuem maior influência nas ressonâncias do sistema.

Nas Figuras 5.9 e 5.10 são mostradas as funções  $\epsilon_p$  calculadas pelas malhas do tipo A e B, respectivamente. Comparando os resultados destas figuras pode-se visualizar que as malhas do tipo B apresentaram erros menores do que as malhas do tipo A. Isto se deve à discretização fixa adotada nas malhas pois, enquanto a malha do tipo A possui trinta elementos na direção axial do tubo a malha do tipo B possui noventa e seis elementos. Este aspecto será melhor investigado na Seção 5.2.3.

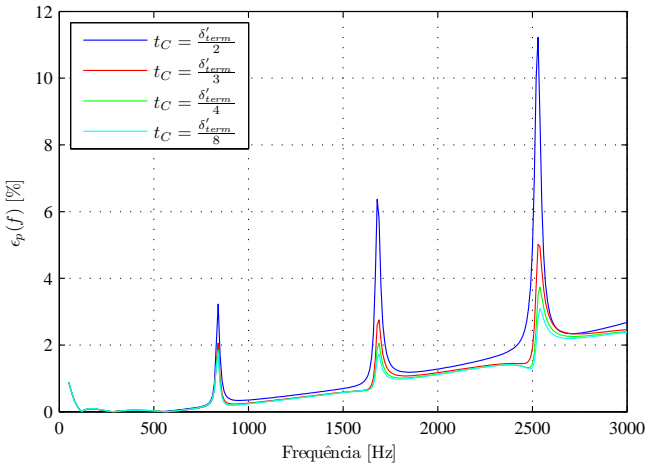


Figura 5.9: Funções  $\epsilon_p$  calculadas para diferentes malhas do tipo A.

Nas Figuras 5.11 e 5.12 são mostradas as funções  $\epsilon_{\bar{\tau}}$  calculadas pelas malhas do tipo A e B, respectivamente. Nestes resultados foi observado um erro maior na malha do tipo B em frequências baixas. Esta diferença pode ter ocorrido devido ao aumento da camada limite quando se diminui a frequência. Como a malha do tipo B possui apenas dois elementos na região interna do tubo (ver Figura 5.8), esta malha apresenta maior erro do que a malha do tipo A que possui três elementos.

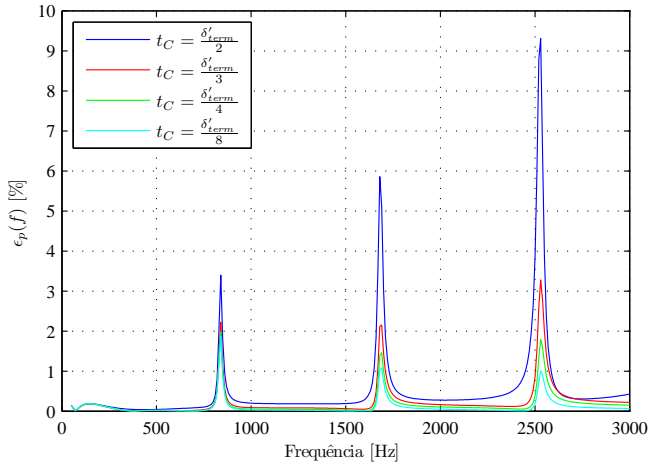


Figura 5.10: Funções  $\epsilon_p$  calculadas para diferentes malhas do tipo B.

Nas Figuras 5.13 e 5.14 são mostradas as funções  $\epsilon_{\bar{u}}$  calculadas pelas malhas do tipo A e B, respectivamente. Na comparação dos resultados obtidos observa-se que os erros possuem valores muito semelhantes para ambos os tipos de malha.

Vale lembrar que a espessura da camada limite térmica foi adotada como valor de referência para a discretização por ser maior do que a camada limite viscosa. Portanto, as discretizações adotadas abrangem uma parte do comportamento viscoso além da camada limite viscosa. Este fato pode ter sido importante na avaliação das funções  $\epsilon_{\bar{u}}$  que apresentaram valores menores do que as funções  $\epsilon_{\bar{\tau}}$ .

A partir da análise dos resultados para a geometria do tubo simples, é possível observar que o uso de ao menos três elementos na espessura da camada limite com trinta elementos ao longo do comprimento do tubo permitem obter-se erros máximos de 10% em relação à solução analítica do modelo LRF. Estes valores máximos de erro correspondem a menos de 1 dB de diferença e será adotado como critério para discretização da camada limite nas análises subsequentes.

Os valores de erro ainda podem ser diminuídos com o acréscimo de elementos na espessura da camada limite, porém a discretização ao longo do comprimento do tubo também possui influência nas funções de erro calculadas e será analisada na próxima seção.

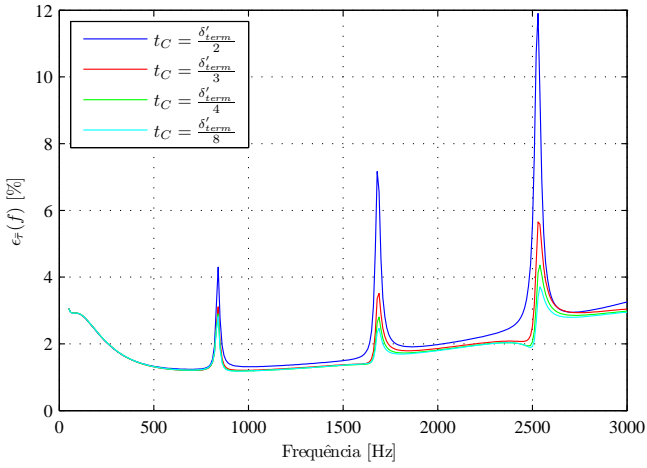


Figura 5.11: Funções  $\epsilon_\tau$  calculadas para diferentes malhas do tipo A.

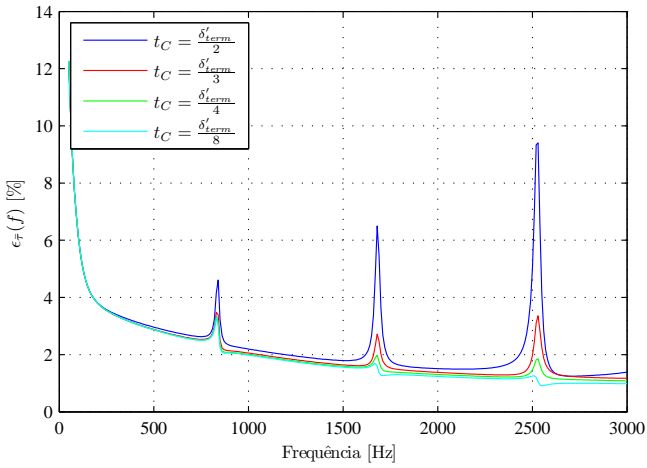


Figura 5.12: Funções  $\epsilon_\tau$  calculadas para diferentes malhas do tipo B.



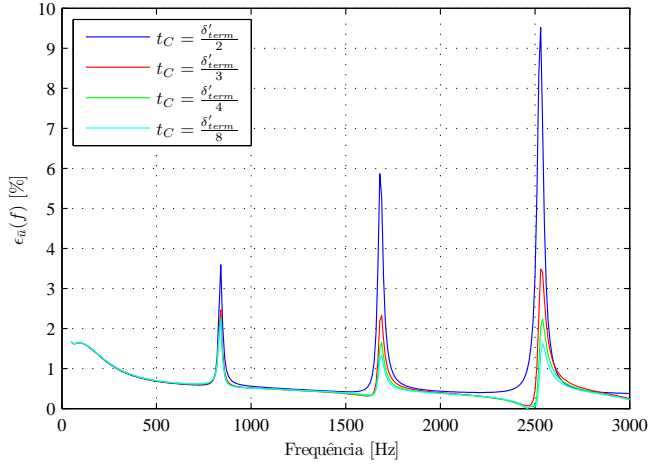


Figura 5.13: Funções  $\epsilon_{\bar{u}}$  calculadas para diferentes malhas do tipo A.

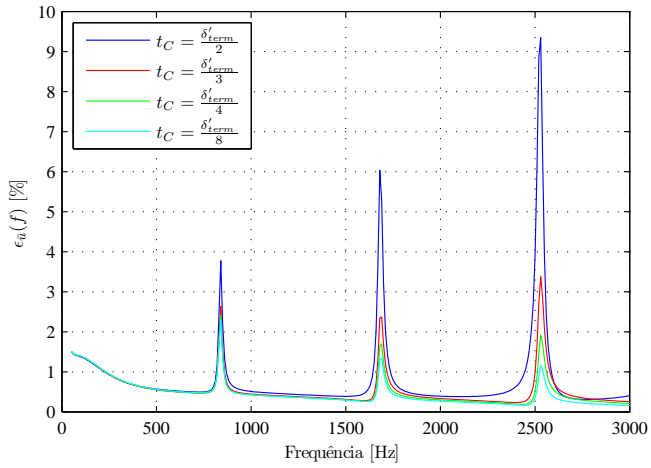


Figura 5.14: Funções  $\epsilon_{\bar{u}}$  calculadas para diferentes malhas do tipo B.

### 5.2.3 Discretização na direção de propagação da onda

A utilização de elementos com boa razão de aspecto e dimensões da ordem da espessura da camada limite eleva muito o custo computacional para solução do sistema como mostrado na Figura 5.2. O estudo da discretização na direção de propagação da onda tem como objetivo obter um critério de tamanho máximo de elemento para redução do custo computacional, mantendo um nível aceitável de erros na solução.

#### 5.2.3.1 Malhas analisadas

Para analisar a discretização na direção de propagação da onda, utilizou-se somente a malha do tipo A apresentada na Seção 5.2.1, pois este tipo de malha possibilita um controle preciso da discretização na direção axial do tubo.

As discretizações na espessura da camada limite e no interior do tubo foram fixadas com os parâmetros:  $t_C = \delta'_{term}/3$  e  $t_I = R_I/3$ . Foram analisadas diferentes discretizações com a variação do parâmetro  $l_E$  apenas. Na Figura 5.15 tem-se um exemplo de malha adotada.

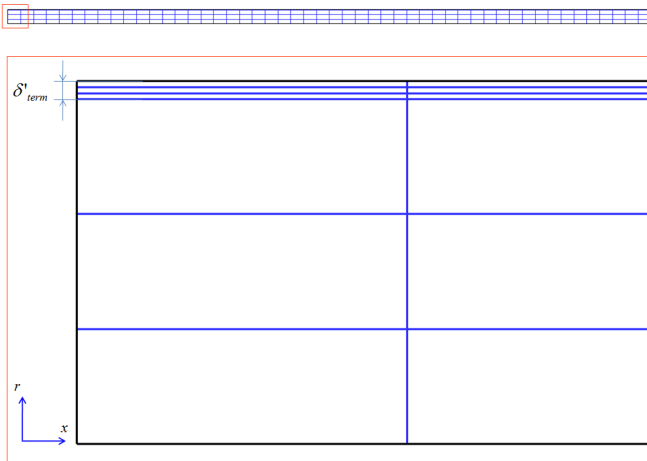


Figura 5.15: Exemplo de malha para análise da discretização na direção de propagação da onda ( $l_E = L/30$ ).

### 5.2.3.2 Resultados

Nas Figuras 5.16 a 5.18 estão apresentadas as funções  $\epsilon_p$ ,  $\epsilon_{\bar{\tau}}$  e  $\epsilon_{\bar{u}}$  calculadas com a malha descrita na Figura 5.15. No comportamento das funções  $\epsilon_p$  e  $\epsilon_{\bar{\tau}}$  observa-se uma redução em quase todo o espectro na medida em que se aumenta a quantidade de elementos na direção axial. Por outro lado, a função  $\epsilon_{\bar{u}}$  apresentou comportamento semelhante ao da análise da discretização da camada limite.

Alguns aspectos da avaliação do comportamento das funções erro precisam ser melhor investigados, porém os erros obtidos apresentaram resultados satisfatórios. As funções erro calculadas nas Figuras 5.16 a 5.18 indicam um critério para tamanho máximo de elemento na direção de propagação da onda. Este critério é o mesmo adotado para o modelo acústico clássico onde se recomenda o tamanho máximo do elemento igual a  $1/12$  do comprimento de onda na frequência máxima de análise. Com a aplicação deste critério junto ao critério para discretização da camada limite obtiveram-se erros máximos de aproximadamente 10%, sendo que foram utilizados elementos com funções de aproximação quadráticas para a velocidade de partícula e temperatura acústica e lineares para a pressão acústica.

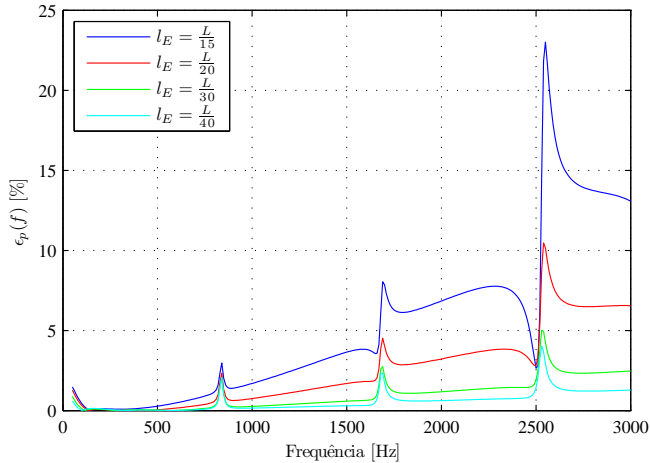


Figura 5.16: Funções  $\epsilon_p$  calculadas para diferentes quantidades de elementos na direção axial.

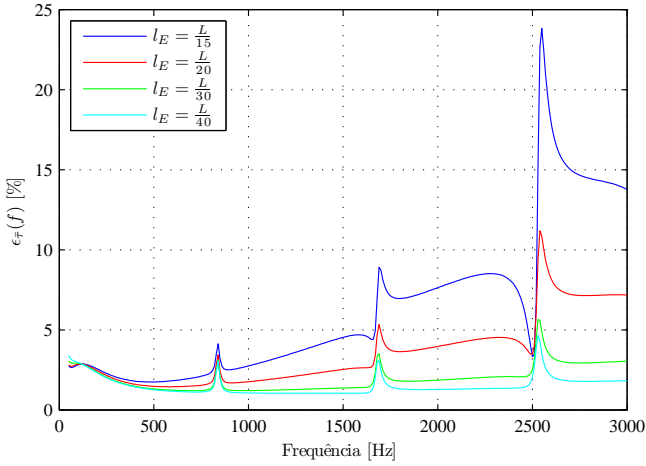


Figura 5.17: Funções  $\epsilon_{\bar{\tau}}$  calculadas para diferentes quantidades de elementos na direção axial.

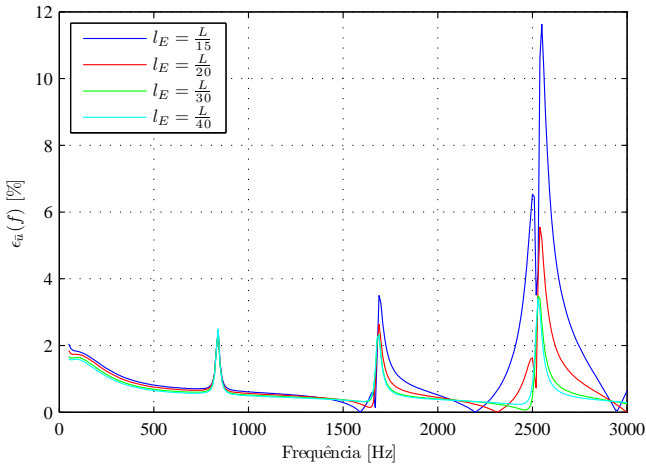


Figura 5.18: Funções  $\epsilon_{\bar{u}}$  calculadas para diferentes quantidades de elementos na direção axial.

## 5.3 DISCRETIZAÇÃO 3D

### 5.3.1 Malhas analisadas

O problema motivador deste trabalho (análise de alto-falantes para aparelhos auditivos) possui uma geometria que não pode ser analisada com malhas bidimensionais. Com o objetivo de testar o modelo NSFL tridimensional, foi repetida a análise da discretização da camada limite apresentada na Seção 5.2.2 utilizando malhas tridimensionais.

O uso de elementos tridimensionais para o modelo NSFL aumenta drasticamente o custo computacional da solução. Mediante os critérios obtidos para os tamanhos máximos dos elementos nas Seções 5.2.2 e 5.2.3, foram construídas malhas tridimensionais. Para uma redução no custo computacional foram adotados planos de simetria nos modelos criados.

A construção das malhas tridimensionais foi semelhante às malhas bidimensionais, em que se discretizou a região da camada limite variando-se somente a espessura do elemento conforme a Figura 5.19. Foi construída uma malha bidimensional da metade de um círculo e esta foi extrudada com trinta elementos ao longo do comprimento do tubo conforme a Figura 5.20.

O uso de trinta elementos ao longo do comprimento do tubo obedece ao critério de tamanho máximo dos elementos na direção de propagação da onda obtido na Seção 5.2.3.2.

### 5.3.2 Resultados

As funções erro obtidas pela solução dos modelos NSFL tridimensionais apresentaram o comportamento esperado, sendo muito semelhante aos modelos bidimensionais, como pode ser visto nas Figuras 5.21 a 5.23. Os critérios para discretização mínima, de três elementos na espessura da camada limite e doze elementos por comprimento de onda, mostraram-se consistentes também para os modelos tridimensionais, apresentando erros menores que 10% em relação a solução analítica do modelo LRF.

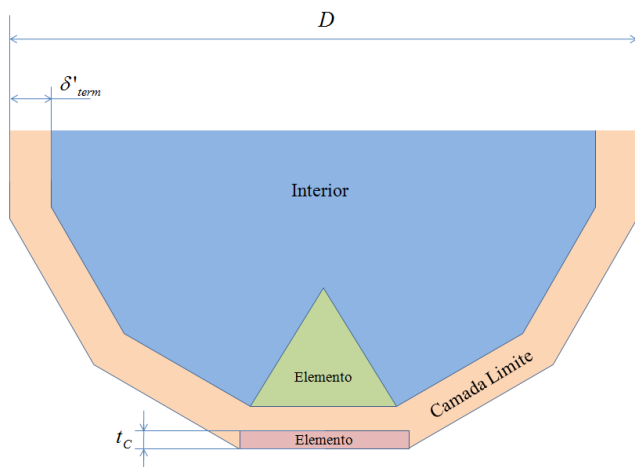


Figura 5.19: Parâmetros para avaliação das malhas 3D.

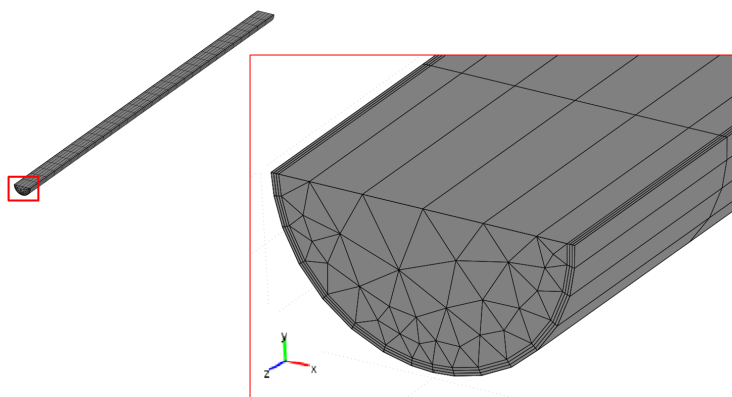


Figura 5.20: Discretização tridimensional do tubo simplificado com plano XZ de simetria.

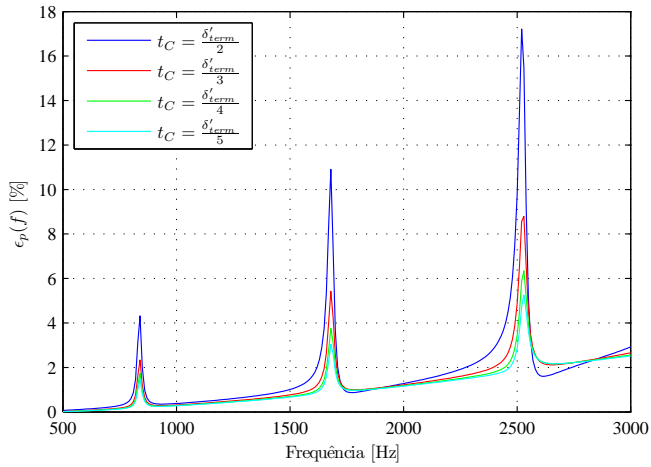


Figura 5.21: Funções  $\epsilon_p$  calculadas com malhas 3D e diferentes discretizações na camada limite.

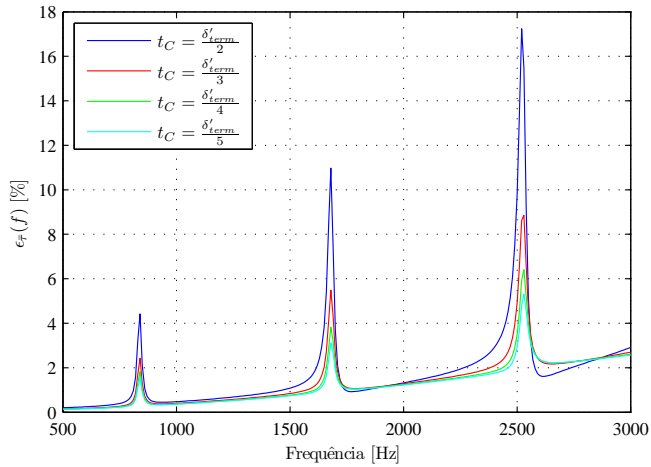


Figura 5.22: Funções  $\epsilon_f$  calculadas com malhas 3D e diferentes discretizações na camada limite.

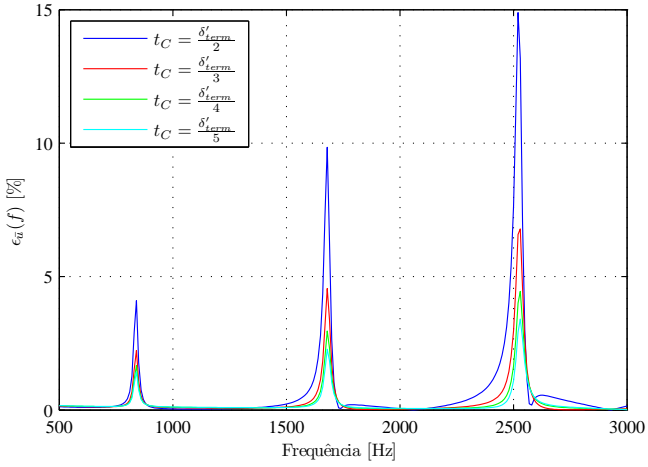


Figura 5.23: Funções  $\epsilon_{\bar{u}}$  calculadas com malhas 3D e diferentes discretizações na camada limite.



## 6 ESTUDO DAS CONDIÇÕES DA ANÁLISE EXPERIMENTAL

A comparação dos resultados calculados pelos modelos acústicos viscotérmicos com os dados experimentais apresentou pequenas diferenças no caso do tubo simples mostrado na Seção 4.3. Porém, no caso do tubo com variação de seção, as diferenças foram muito maiores do que no tubo simples. Neste capítulo, busca-se elucidar a causa das diferenças encontradas entre resultados calculados e os dados experimentais.

### 6.1 METODOLOGIA

Em uma análise geral, ao se compararem apenas os resultados calculados pelos modelos NSFL e LRF, nota-se que o comportamento das curvas possuem muitas semelhanças. Este fato implica na possibilidade de algumas condições de contorno não estarem representando corretamente o sistema físico.

O sistema acústico medido pelo aparato apresentado na Figura 4.1 envolve dois problemas acústicos distintos em cada região a seguir:

- Região interna: representado pela propagação da onda acústica no interior dos tubos;
- Região externa: dissipação acústica gerada por um campo livre na saída dos tubos que é representada nos modelos acústicos pela condição de contorno de impedância de radiação  $\tilde{Z}_{rad}$ .

A impedância de radiação utilizada para solução dos modelos acústicos apresentados no Capítulo 4 é extraída da solução da radiação de um volume de ar que se comporta como um pistão [39]. Neste caso, o perfil de velocidade na saída do tubo é considerado plano, ou seja, não há efeitos viscotérmicos nesta aproximação.

Para investigar se a impedância de radiação é modificada quando os efeitos viscotérmicos estiverem presentes na formulação acústica, faz-se necessário modelar a radiação acústica existente na região externa dos tubos. A impedância de radiação será analisada através de um modelo numérico de radiação acústica que será detalhado posteriormente.

Na análise experimental apresentada na Seção 4.1, existem pequenos afastamentos dos sensores com relação à extremidade do tubo. Estes afastamentos se devem ao diâmetro dos sensores e um pequeno afastamento utilizado para não haver contato do sensor com as paredes

do tubo. Com o modelo de radiação acústica, o efeito da posição dos sensores em relação ao tubo será analisado.

### 6.1.1 Configuração experimental analisada

Para simplificar a construção do modelo numérico, os tubos analisados no Capítulo 4 foram novamente medidos com a utilização de um flange retangular de aproximadamente 2,0 m x 1,5 m na extremidade aberta de acordo com a Figura 6.1. Desta forma, simplifica-se o sistema acústico na região externa do tubo pois elimina-se os efeitos de espessura das paredes do tubo e também o efeito de espalhamento das ondas nas paredes externas do tubo.

O custo computacional das análises é reduzido pois, nesta configuração a região externa será limitada pelo flange na saída do tubo que será modelado como uma semi-esfera.

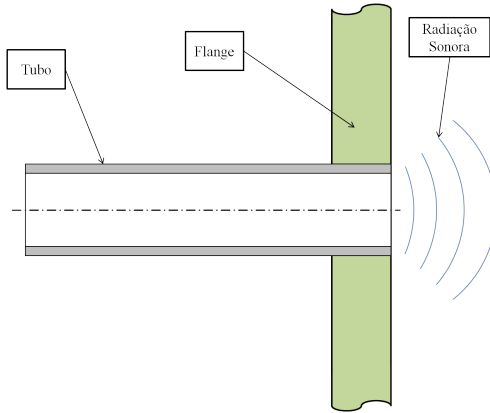


Figura 6.1: Posição do flange no tubo.

### 6.1.2 Modelo com impedância de radiação

A impedância de radiação para tubos flangeados é obtida pela solução da radiação acústica de um pistão com flange infinito que é dada por [39]

$$\tilde{Z}_{rad} = \rho_0 c_0 \left[ 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} + i \frac{S_1(2ka)}{ka} \right], \quad (6.1)$$

onde  $S_1()$  representa a função de Struve de ordem 1.

Em baixas frequências ( $ka \ll 1$ ), a impedância de radiação pode ser aproximada pela seguinte equação [39]:

$$\tilde{Z}_{rad} = \rho_0 c_0 \left[ \frac{1}{2}(ka)^2 + i \frac{8}{3\pi}(ka) \right]. \quad (6.2)$$

O tubos simples e o tubo com variação de seção serão analisados com as frequências máximas de 3000 Hz ( $ka = 0,24$ ) e 6000 Hz ( $ka = 0,48$ ) respectivamente. Os modelos acústicos viscotérmicos foram calculados da mesma forma apresentada no Capítulo 4 com aplicação da impedância de radiação aproximada na Eq. (6.2). Os valores calculados pelos modelos viscotérmicos apresentaram diferenças com relação aos dados experimentais semelhantes aos resultados obtidos com tubos não-flangeados (ver Figuras 6.2 e 6.3)

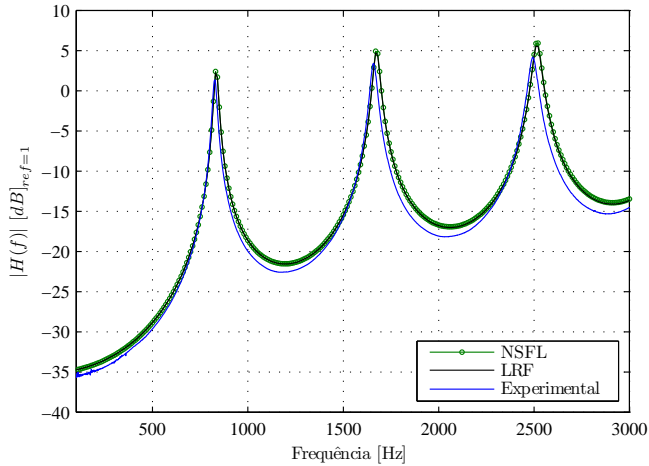


Figura 6.2: Magnitude de  $H(f)$  para o tubo simples flangeado.

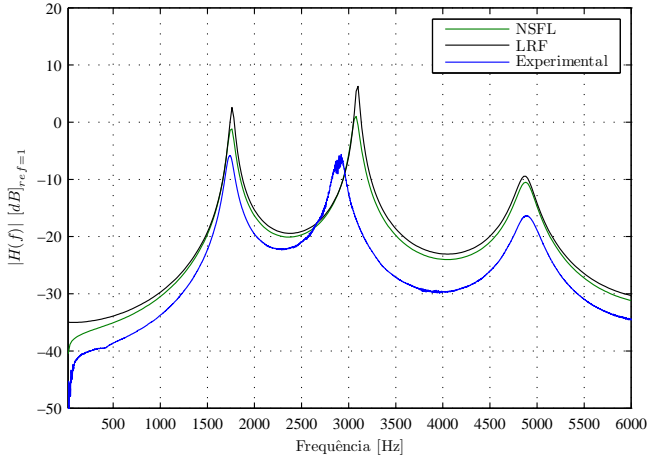


Figura 6.3: Magnitude de  $H(f)$  para o tubo flangeado com variação de seção.

### 6.1.3 Modelos acústicos em domínios externos sem restrições

Os problemas acústicos externos com domínios sem restrições representam um desafio para o método de elementos finitos. Para solucionar tais problemas, o domínio sem restrições  $\mathfrak{R}$  precisa ser truncado por uma condição artificial  $\Gamma_R$  gerando um domínio computacional limitado  $\Omega$  como no exemplo da Figura 6.4 [47, 48].

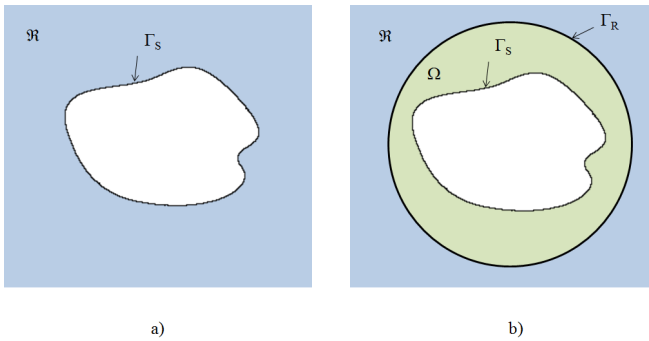


Figura 6.4: Exemplo de a) um domínio sem restrições e b) um domínio computacional limitado para problemas acústicos externos.

O truncamento do domínio do problema diminui o custo computacional da solução por FEM, porém este procedimento precisa ser balanceado para minimizar qualquer reflexão espúria de forma eficiente, com erros menores que o erro devido à discretização do problema [48].

Existem variadas técnicas para o truncamento do domínio externo como: condições de contorno absorventes (*Absorbing Boundary Condition*), elementos infinitos e camadas absorventes [47].

As condições de contorno absorventes possuem boa precisão porém sua aplicabilidade é limitada a geometrias de contorno simples.

Pela técnica de elementos infinitos, a condição de contorno artificial é substituída por uma única camada de elementos com comprimentos infinitos (ver Figura 6.5). Os elementos infinitos são construídos com funções bases harmônicas com a intenção de representar o comportamento da solução no domínio sem restrições  $\mathcal{R}$ .

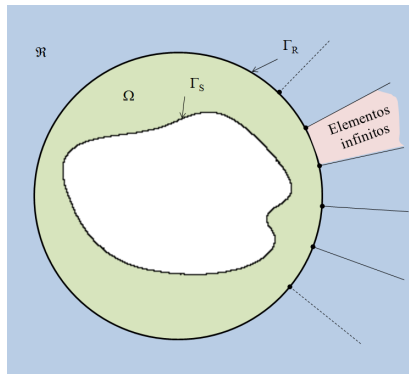


Figura 6.5: Topologia de um elemento infinito.

A técnica de camadas absorventes consiste em um domínio externo  $\Omega_x$  de Elementos Finitos com a formulação modificada para absorver as ondas que deixam o domínio do problema  $\Omega$  (ver Figura 6.6). O método PML (*Perfectly Matched Layer*) se destacou como uma abordagem de camadas absorventes projetadas com duas características básicas [49]:

- Não haver reflexões na interface  $\Gamma_R$  para qualquer direção de onda plana;
- Queda exponencial da solução dentro da camada absorvente.

O método PML foi apresentado primeiramente por Berenger [50] como uma ferramenta para solução de ondas eletromagnéticas em do-

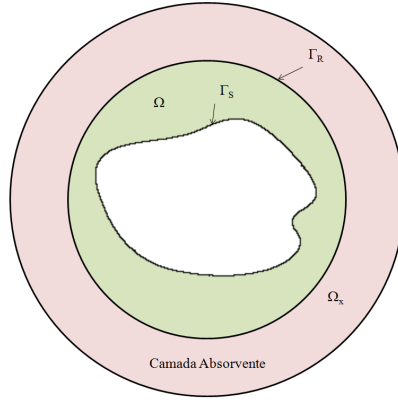


Figura 6.6: Topologia de uma camada absorvente.

mínios irrestritos utilizando o método de diferenças finitas no domínio do tempo. Este método ganhou popularidade originando uma grande quantidade de publicações contendo formulações alternativas e extensão do método para outras aplicações [47].

Aplicações do método PML em formulações FEM para modelos acústicos podem ser encontradas em algumas literaturas como [51–54]. No código comercial Comsol 3.5a [34] tem-se este método aplicado na formulação FEM do modelo acústico clássico para solução de problemas em domínios bidimensionais e tridimensionais.

Utilizando a técnica PML disponível no código comercial Comsol 3.5a [34], foram construídos os modelos acústicos da propagação na região externa do tubo conforme a Figura 6.7. As condições de contorno mostradas na Figura 6.7 foram aplicadas conforme foram definidas para cada modelo no Capítulo 4. O domínio PML é configurado para absorver as ondas sonoras que se radiam a partir do ponto central do tubo na interface com o domínio externo.

As configurações dos modelos avaliados serão detalhadas nas seções seguintes.

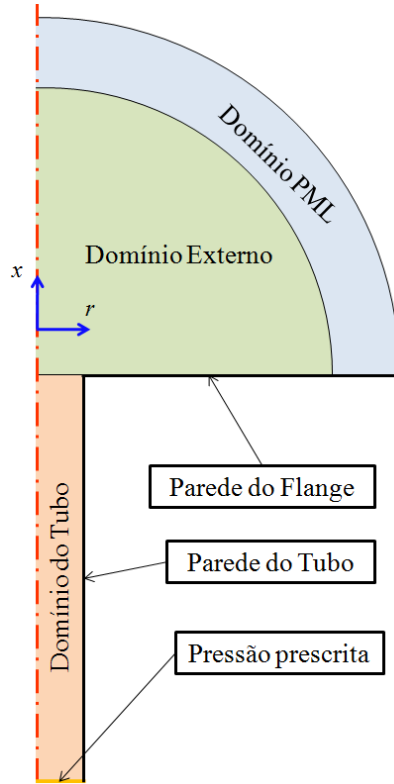


Figura 6.7: Configuração dos modelos acústicos bidimensionais dos tubos flangeados.

## 6.2 ANÁLISE DA IMPEDÂNCIA DE RADIAÇÃO

A seguir será avaliado o modelo numérico de propagação acústica na região externa do tubo acoplado com os modelos acústicos viscotérmicos na região interna do tubo. Nesta análise, busca-se comparar os resultados obtidos pelos modelos onde a região externa ao tubo é modelada com os modelos onde se aplica apenas a impedância de radiação na interface aberta do tubo.

### 6.2.1 Modelo acústico clássico

Para validação do método PML, os tubos foram avaliados primeiramente com a formulação FEM do modelo acústico clássico. A forma de aplicação dos modelos está disposta na Figura 6.8.

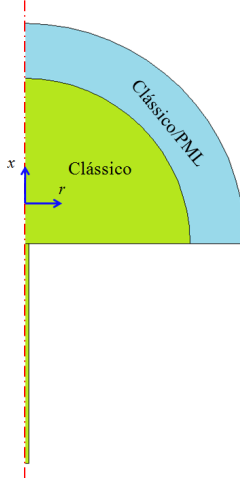


Figura 6.8: Configuração para aplicação do modelo acústico clássico com radiação acústica.

A comparação dos resultados obtidos do modelo acústico clássico com PML e do modelo acústico clássico com  $\tilde{Z}_{rad}$  aplicada estão mostrados nas Figuras 6.9 e 6.10. Os resultados para o tubo simples apresentaram diferenças muito pequenas. No tubo com variação de seção, os resultados apresentaram diferenças um pouco maiores nas frequências mais altas. Estas diferenças são ocasionadas devido à faixa de frequência onde a aproximação de  $\tilde{Z}_{rad}$  é válida ( $ka \ll 1$ ).

Portanto, pode-se constatar que o método PML apresenta resultados satisfatórios e pode ser utilizado de acordo com a configuração da região externa ao tubo proposta na Figura 6.8. Neste sentido, as dimensões e configurações desta região serão preservadas e aplicadas nas próximas análises deste capítulo.



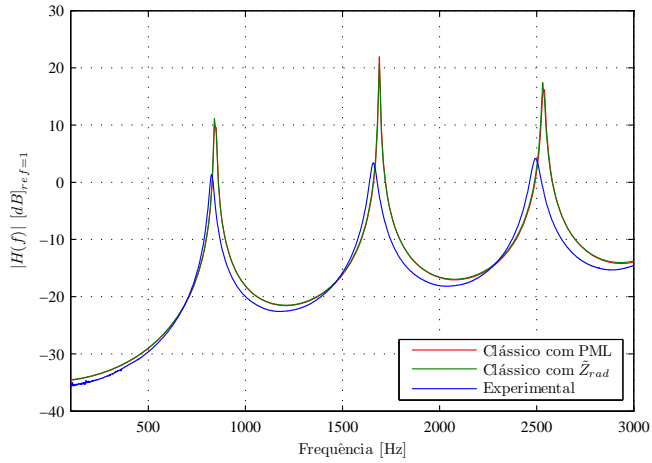


Figura 6.9: Magnitude de  $H(f)$  para o tubo simples calculadas com o modelo acústico clássico com radiação acústica.

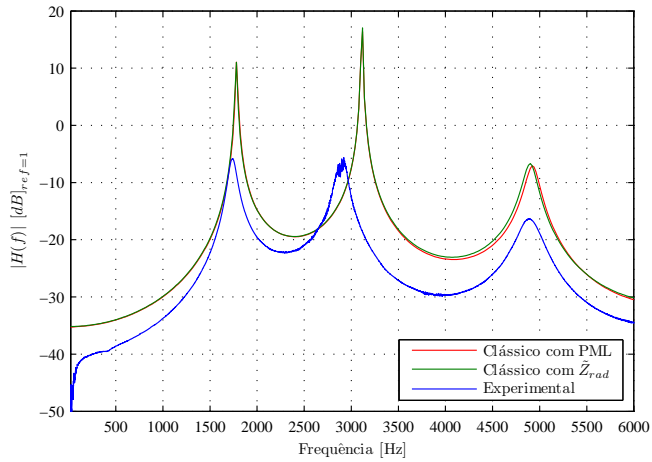


Figura 6.10: Magnitude de  $H(f)$  para o tubo com variação de seção calculadas com o modelo acústico clássico com radiação acústica.

### 6.2.2 Modelo LRF

No modelo LRF, incluem-se os efeitos viscotérmicos apenas no domínio do tubo, como mostrado na Figura 6.11. A inclusão dos efeitos é feita através da velocidade do som, de acordo com a Eq. (3.24) que é dependente das propriedades do fluido, do raio do tubo e da frequência de excitação do sistema.

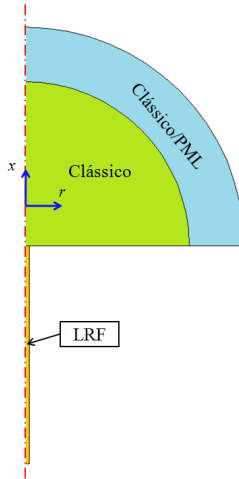


Figura 6.11: Configuração para aplicação do modelo LRF com radiação acústica.

A comparação dos valores de magnitude calculados pelo modelo LRF com PML e pelo modelo LRF com  $\tilde{Z}_{rad}$  aplicada estão apresentados nas Figuras 6.12 e 6.13. De forma geral, os resultados se mostraram ainda muito próximos como no modelo acústico clássico. As diferenças existentes na Figura 6.13 precisam ser melhor investigadas, mas ainda são muito pequenas quando comparadas com as diferenças em relação aos dados experimentais.

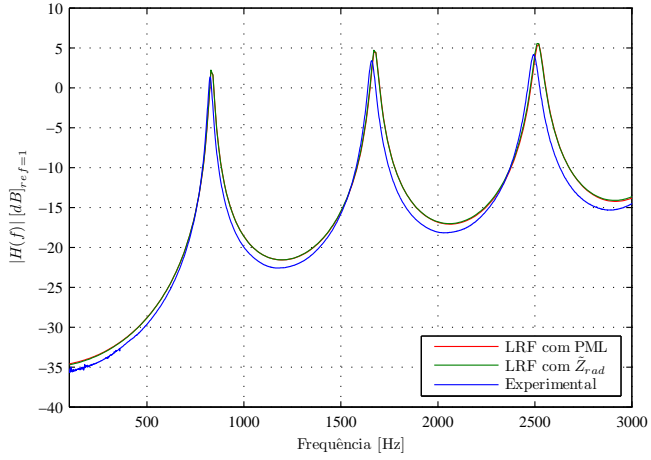


Figura 6.12: Magnitude de  $H(f)$  para o tubo simples calculadas com o modelo LRF com radiação acústica.

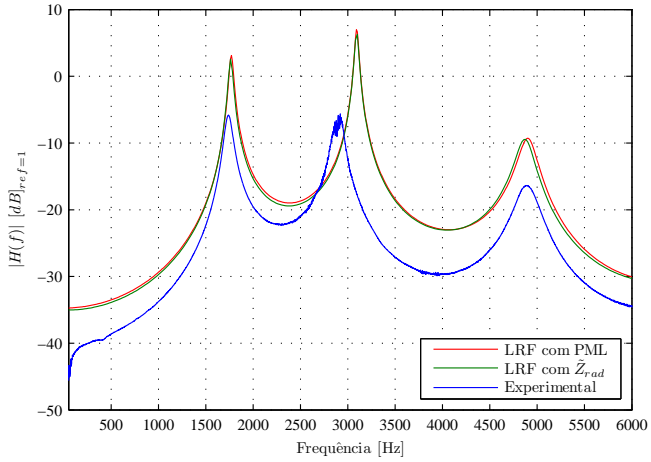


Figura 6.13: Magnitude de  $H(f)$  para o tubo com variação de seção calculadas com o modelo LRF com radiação acústica.

### 6.2.3 Modelos NSFL

O modelo NSFL foi acoplado ao modelo acústico clássico através dos dois tipos de configuração apresentados na Figura 6.14. A configuração do tipo 2 têm o objetivo de avaliar possíveis efeitos na região da saída do tubo.

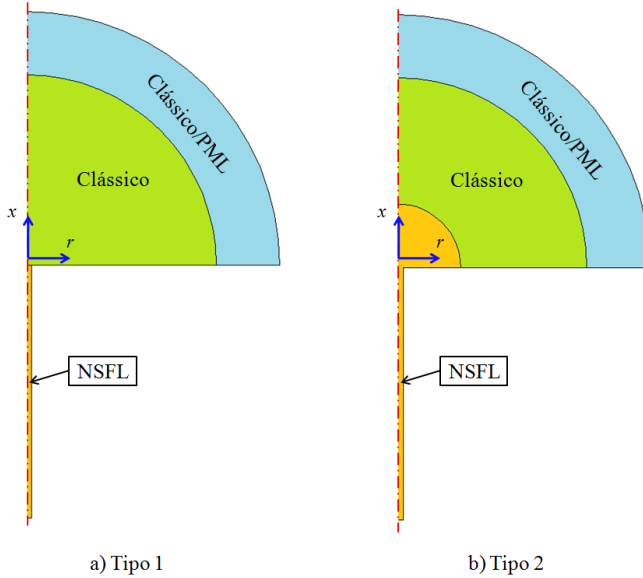


Figura 6.14: Configurações para aplicação do modelo NSFL com radiação acústica.

O acoplamento dos modelos NSFL e acústico clássico é feito através das condições de contorno não-essenciais nas interfaces dos respectivos domínios. No modelo NSFL, considera-se que a tensão normal à interface ( $\mathbf{h}_M$ ) é igual a pressão acústica no domínio acústico clássico. Inserindo esta condição na formulação fraca (3.41), a expressão integral sobre o contorno  $\partial\Omega$  da Eq. (3.41a) torna-se igual a

$$\int_{\partial\Omega} u_r^* h_{Mr} \, d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} u_r^* n_r p_a \, d\partial\Omega, \quad (6.3)$$

onde  $p_a$  é a pressão acústica do modelo acústico clássico.

Por sua vez, no modelo acústico clássico, considera-se que velocidade de partícula na direção normal à interface ( $h_A$ ) é igual à velocidade

de partícula no domínio NSFL. Inserindo esta condição na formulação fraca (3.11), a expressão integral sobre o contorno  $\partial\Omega$  torna-se:

$$\int_{\partial\Omega} p_a^* h_A \, d\partial\Omega = i\omega\rho_0 \int_{\partial\Omega} p_a^*(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, d\partial\Omega, \quad (6.4)$$

onde  $p_a^*$  é a função ponderação aplicada ao modelo acústico clássico pelo método de Galerkin.

As Eqs. (6.3) e (6.4) originam as matrizes de acoplamento do problema, que na forma matricial é escrito como

$$\begin{bmatrix} [A] & [0] & [B] & [S] \\ [0] & [C] & [D] & [0] \\ [B]^T & [D]^T & [E] & [0] \\ [R] & [0] & [0] & [F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\tau\} \\ \{p\} \\ \{p_a\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{h_M\} \\ \{h_T\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (6.5)$$

sendo:

$$[S] = \int_{\partial\Omega} u_r^* n_r p_a \, d\partial\Omega, \quad (6.6)$$

$$[R] = i\omega \int_{\partial\Omega} p_a^*(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, d\partial\Omega, \quad (6.7)$$

$$[F] = -\omega^2[M^a] + [K^a]. \quad (6.8)$$

A comparação dos valores de magnitude calculados pelo modelo NSFL com PML e pelo modelo NSFL com  $\tilde{Z}_{rad}$  aplicada estão apresentados nas Figuras 6.15 e 6.16. Os valores de magnitude obtidos pelos modelos NSFL com PML foram um pouco maiores do que os valores obtidos pelo modelo NSFL com  $\tilde{Z}_{rad}$  aplicada. O motivo das diferenças de magnitude merece maior investigação, porém as diferenças de todos os resultados calculados pelos modelos NSFL com relação aos dados experimentais ainda permaneces muito maiores. Os diferentes tipos de configurações para os modelos NSFL mostrados na Figura 6.14 apresentaram resultados com pequenas diferenças.

As impedâncias na saída do tubo também foram calculadas e comparadas com a impedância de radiação obtida analiticamente na Eq. (6.2). Nas Figuras 6.17 e 6.18 estão plotadas as curvas de impedâncias obtidas para cada tipo de modelo com PML solucionado neste capítulo. Comparando as curvas de impedância calculadas, verifica-se que as impedâncias dos modelos acústico clássico e LRF apresentaram resultados muito próximos porém distantes da impedância analítica

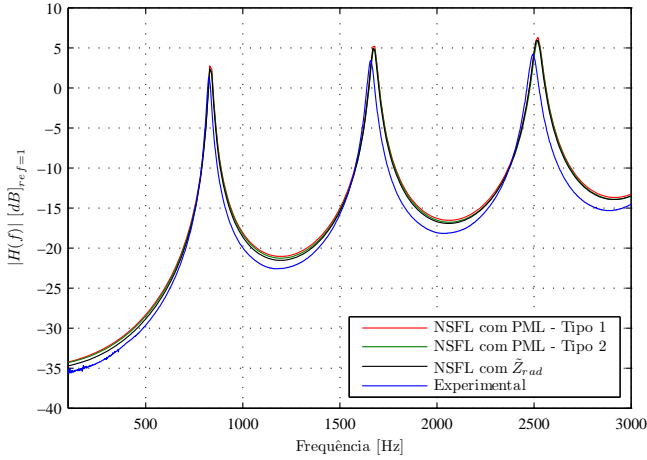


Figura 6.15: Magnitude de  $H(f)$  para o tubo simples calculadas com o modelo NSFL com radiação acústica.

$\tilde{Z}_{rad}$ . As curvas de impedância calculadas pelo modelo NSFL com a configuração Tipo 1 apresentaram maior proximidade com as curvas  $\tilde{Z}_{rad}$  enquanto que a configuração Tipo 2 apresentou os maiores valores nas curvas.

As curvas de impedância obtidas pelo modelo NSFL com configuração Tipo 2 mostram que a impedância pode ser alterada devido aos efeitos viscotérmicos na região de saída do tubo. Porém, a variação das curvas de magnitude calculadas pelos modelos NSFL com PML e NSFL com  $\tilde{Z}_{rad}$  ainda foram muito pequenas no sentido de aproximação com os dados experimentais.

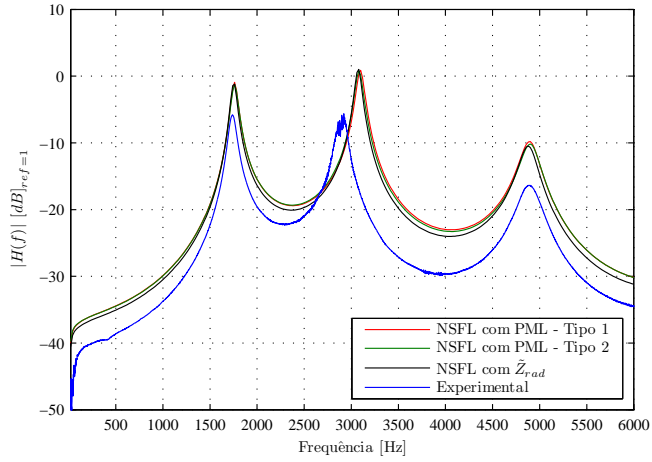


Figura 6.16: Magnitude de  $H(f)$  para o tubo com variação de seção calculada com o modelo NSFL com radiação acústica.

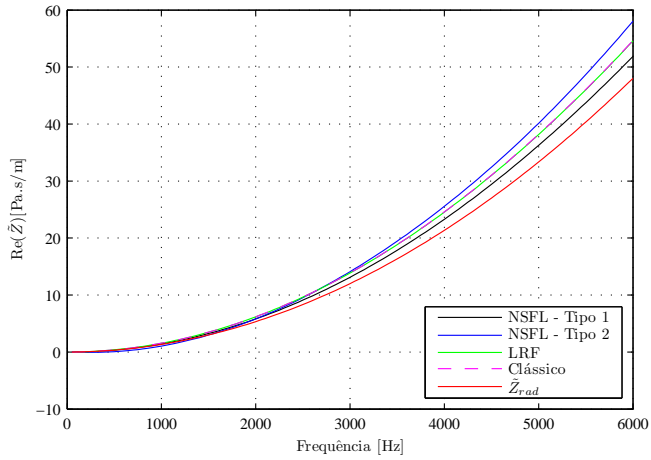


Figura 6.17: Parte real da impedância na saída do tubo.

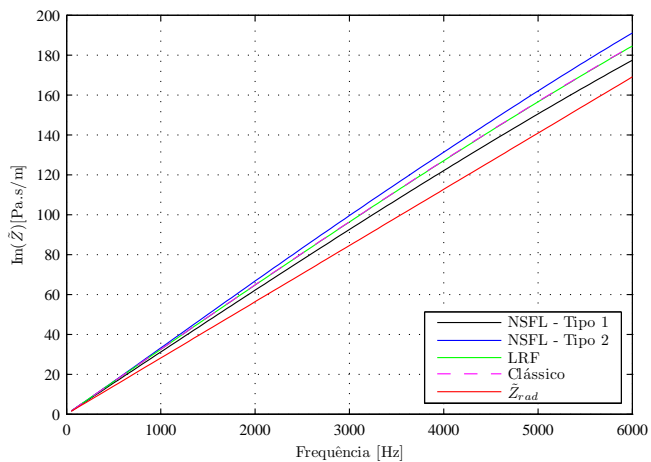


Figura 6.18: Parte imaginária da impedância na saída do tubo.



### 6.3 EFEITO DA POSIÇÃO DOS SENSORES

A análise anterior mostrou que a variação na impedância de radiação devido aos efeitos viscotérmicos não contribui de forma significativa na resposta dos sistemas analisados. Porém, os valores calculados pelos modelos acústicos viscotérmicos ainda se mostram distantes dos dados experimentais, principalmente, para o caso do tubo com variação de seção que será agora avaliado com maior atenção.

A avaliação experimental apresenta algumas características que não foram consideradas até esta seção. Ao se observar a posição na qual os sensores estão dispostos na análise experimental, pode-se ver que existe um afastamento  $\delta$  entre os sensores e as extremidades dos tubos, como pode ser visto na Figura 6.19. Este afastamento deve-se ao raio do sensor somado a um espaçamento que se aplica para não haver contato estrutural entre a parede do tubo e o sensor.

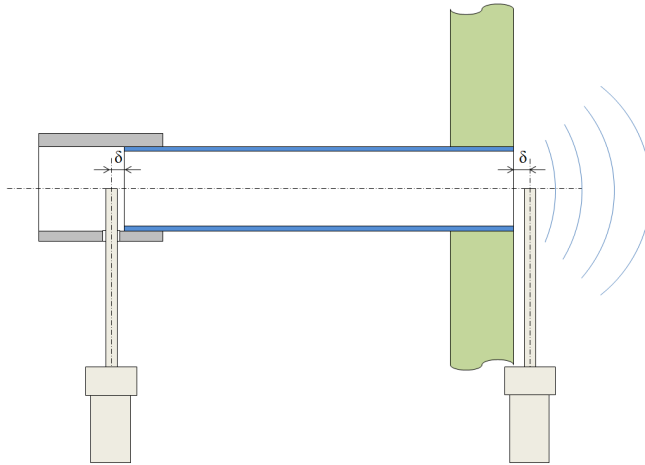


Figura 6.19: Exemplo de erros de posição dos sensores nas análises experimentais.

A construção de modelos por Elementos Finitos com radiação acústica propiciou a avaliação dos resultados em pontos no domínio externo ao tubo. Diante disto, foi realizada uma avaliação do efeito da posição dos dois sensores na obtenção das funções  $H(f)$ .

### 6.3.1 Configuração dos modelos analisados

Para esta avaliação, foram obtidas pressões pontuais em posições próximas às duas extremidades do tubo com variação de seção. As posições dos sensores foram avaliadas através dos parâmetros da Figura 6.20.

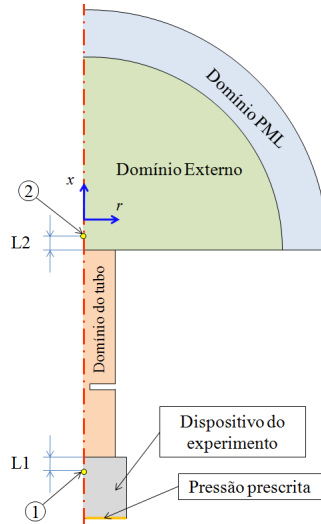


Figura 6.20: Parâmetros para avaliação de  $H(f)$ .

No sistema de medição experimental os tubos são acoplados a um alto-falante através de uma mangueira (ver Figura 4.1). Este dispositivo foi parcialmente modelado para avaliação da pressão acústica na posição do sensor 1, que será variada pelo parâmetro L1. Para excitação deste sistema, aplica-se uma pressão prescrita a uma determinada distância da entrada do tubo, como também é mostrado na Figura 6.20.

Para comparação dos modelos LRF e NSFL, estes foram aplicados apenas nos domínios apresentados na Figura 6.21.

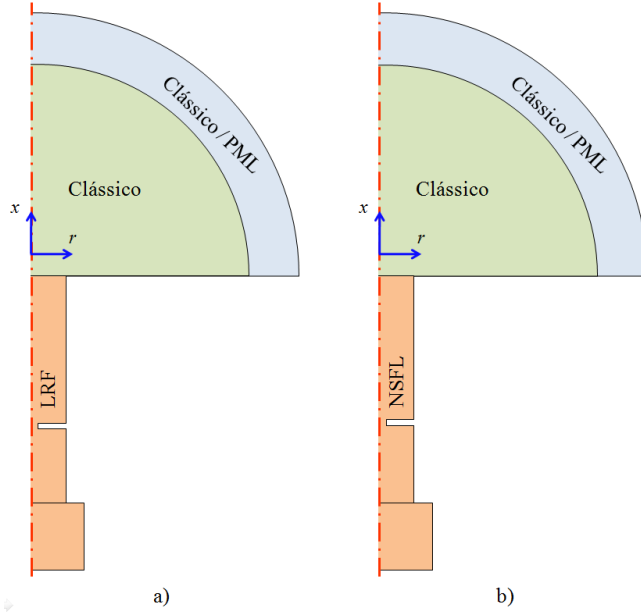


Figura 6.21: Exemplo de configuração dos domínios para aplicação dos modelos acústicos viscotérmicos: a) LRF e b) NSFL.

### 6.3.2 Análise isolada dos sensores

Para quantificar a variação da resposta do sistema devido à posição de cada sensor, foi realizada uma análise isolada de cada sensor, onde a posição é controlada pelos parâmetros L1 e L2 da Figura 6.20.

Primeiramente, foi avaliado o efeito da posição do primeiro sensor através do parâmetro L1, sendo que o segundo sensor se manteve fixo ( $L2 = 0$ ). Os valores de magnitude de  $H(f)$  obtidos nos modelos LRF e NSFL estão apresentados nas Figuras 6.22 e 6.23, respectivamente. Os resultados mostraram que a segunda frequência natural do sistema altera-se à medida que se aumenta o parâmetro L1. Os níveis de amplitude mantiveram-se constantes nesta avaliação, sendo que o modelo NSFL apresentou maior atenuação do que o modelo LRF.

Os resultados mostrados nas Figuras 6.22 e 6.23 sugerem que as diferenças entre os dados numéricos e experimentais observadas na segunda frequência natural do sistema decorrem da posição do sensor 1.

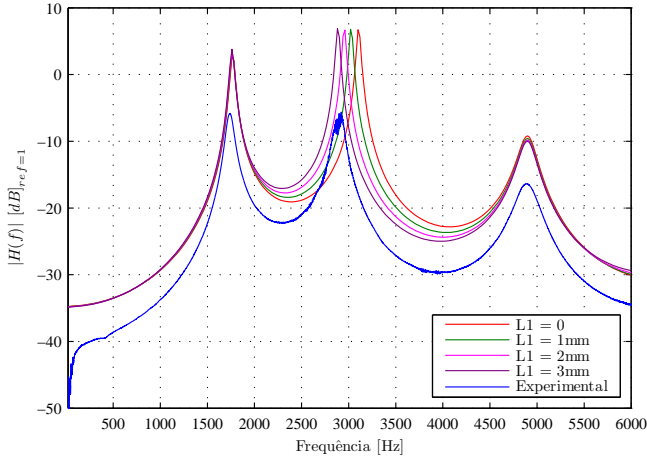


Figura 6.22: Magnitude de  $H(f)$  calculadas em diferentes posições para o ponto 1 com o modelo LRF.

A avaliação da posição do segundo sensor foi obtida através da variação do parâmetro  $L2$ , mantendo fixo  $L1=0$ . Os valores magnitude de  $H(f)$  obtidos nos modelos LRF e NSFL estão apresentados nas Figuras 6.24 e 6.25, respectivamente. Os resultados mostraram uma decaimento da magnitude de  $H(f)$  em todo o espectro que varia conforme o aumento do parâmetro  $L2$ . Este decaimento se deve ao espalhamento da onda acústica no meio externo.

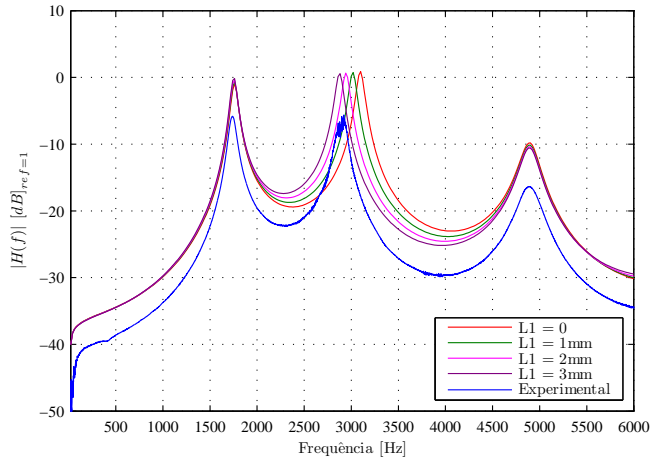


Figura 6.23: Magnitude de  $H(f)$  calculadas em diferentes posições para o ponto 1 com o modelo NSFL.

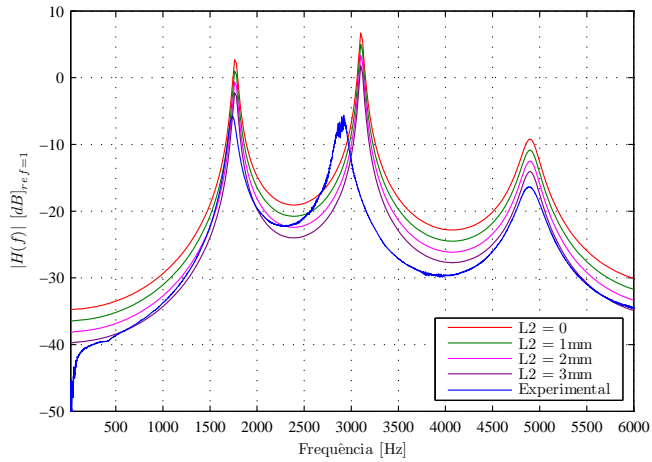


Figura 6.24: Magnitude de  $H(f)$  calculadas em diferentes posições para o ponto 2 com o modelo LRF.

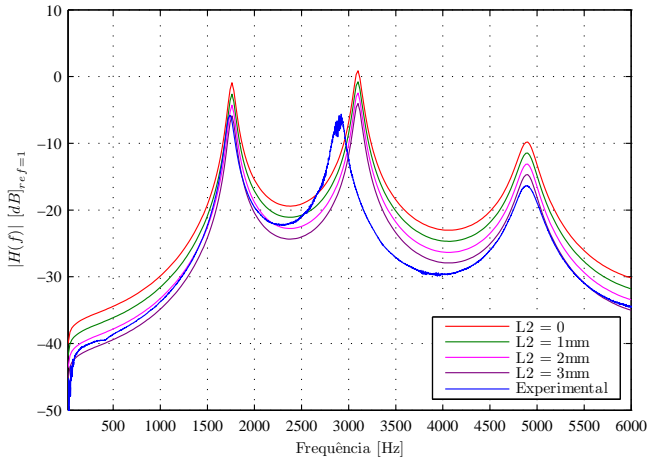


Figura 6.25: Magnitude de  $H(f)$  calculadas em diferentes posições para o ponto 2 com o modelo NSFL.

### 6.3.3 Ajuste dos modelos

Observando os valores de magnitude de  $H(f)$  obtidos na avaliação isolada da posição dos sensores, constata-se que uma sobreposição dos efeitos podem estar presentes no sistema. Diante disto, foram escolhidos valores dos parâmetros L1 e L2 que melhor se ajustam às curvas experimentais.

Quando aplicados os parâmetros L1 e L2 iguais a 2,5 mm, tem-se um ajuste muito próximo das curvas dos modelos acústicos viscotérmicos e os dados experimentais, como mostrado na Figura 6.26.

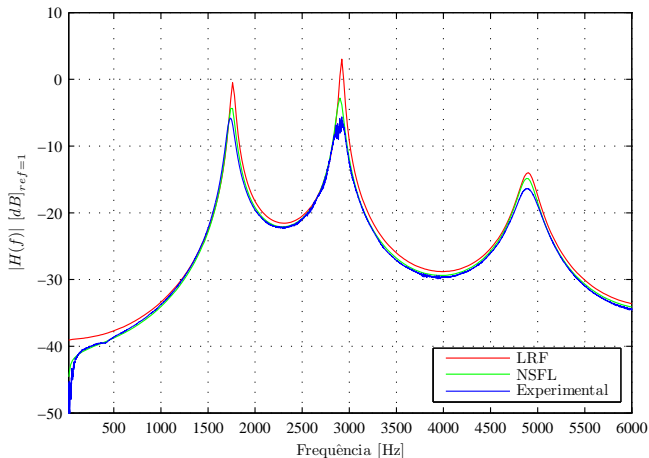


Figura 6.26: Magnitude de  $H(f)$  calculadas pelos modelos LRF e NSFL do tubo com variação de seção utilizando os parâmetros  $L1 = L2 = 2,5$  mm.

O ajuste também foi aplicado ao tubo simples que foi modelado conforme descrito na Seção 6.3.1. As curvas ajustadas para os modelos LRF e NSFL estão apresentadas na Figura 6.27.

A sobreposição dos efeitos de posição dos sensores revelaram uma convergência mais próxima dos modelos acústicos viscotérmicos com os dados experimentais. No caso do tubo simples os modelos LRF e NSFL convergem quase perfeitamente. Porém, no caso do tubo com variação de seção, o modelo LRF apresenta resultados mais distantes dos dados experimentais. A menor convergência do modelo LRF evidencia a limitação deste modelo para aplicação em sistemas com variações bruscas

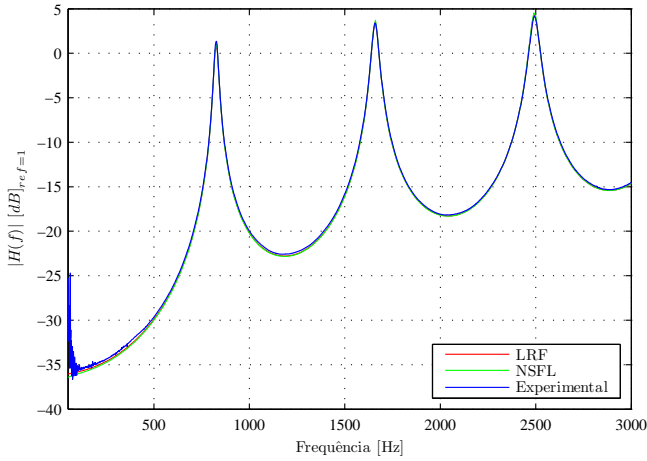


Figura 6.27: Magnitude de  $H(f)$  calculadas pelos modelos LRF e NSFL do tubo simples utilizando os parâmetros  $L1 = 2,5$  mm e  $L2 = 1$  mm.

na geometria, como citado por outros autores na literatura [10, 13].

Os ajustes dos modelos foram obtidos por simples observação das curvas  $H(f)$  devido a dificuldade de controlar precisamente a posição dos sensores no aparato experimental. Diante dos fatos de que o raio do sensor mede aproximadamente 1,55 mm e que um pequeno afastamento é utilizado para não haver contato entre o sensor e a parede dos tubos analisados, pode-se dizer que os parâmetros ajustados estão relativamente próximos da configuração do ensaio.



## 7 CONCLUSÕES

No presente trabalho foram construídos, avaliados e validados modelos acústicos com a inclusão de efeitos viscotérmicos para posterior aplicação na análise vibro-acústica de alto-falantes para aparelhos auditivos. Foi apresentada uma breve revisão das análises acústicas com efeitos viscotérmicos onde foram detalhados dois modelos distintos que foram investigados com mais profundidade. A solução analítica do modelo *Low Reduced Frequency* (LRF) para tubos cilíndricos foi apresentada com detalhes, podendo-se visualizar os parâmetros mais importantes na análise da propagação acústica com efeitos viscotérmicos. O modelo LRF assume hipóteses simplificativas que resultam em um perfil plano da pressão acústica ao longo da seção transversal de sistemas como tubos e frestas. Estas hipóteses assumidas dependem da faixa de frequência e de uma dimensão característica como o raio de um tubo ou a espessura de uma fresta. A aplicabilidade do modelo LRF é limitada a geometrias e condições de contorno simples. A aplicação da solução numérica do modelo LRF também possui limitações quanto à convergência com resultados experimentais, para geometrias mais complexas.

Devido a complexidade do sistema de equações do modelo Navier-Stokes-Fourier linearizado (NSFL), a sua solução de forma analítica não pode ser obtida diretamente e, por isto, este modelo foi apenas resolvido de forma numérica. Os modelos NSFL foram solucionados pelo método de Elementos Finitos, sendo que as formulações foram apresentadas com detalhes. O modelo NSFL foi formulado de duas formas diferentes encontradas na literatura. A formulação irreduzível do modelo NSFL apresentou problemas de instabilidades numéricas que são muito dependentes da discretização adotada. A formulação mista do modelo NSFL mostrou-se mais estável nas avaliações, apresentando boa convergência com a solução analítica do modelo LRF.

A discretização do modelo NSFL foi investigada devido ao grande custo computacional envolvido para a sua solução. Neste estudo, procurou-se obter uma discretização que representasse de forma apropriada a camada limite. Nesta análise se obtiveram dois critérios para uma discretização mínima, para os quais os resultados analisados obtiveram erros menores que 10% em magnitude. Os critérios de discretização obtidos foram: a utilização de no mínimo três camadas de elementos dentro da espessura da camada limite e a utilização de no mínimo doze elementos por comprimento de onda na região exterior à camada limite.

As diferenças dos dados experimentais em relação aos resultados calculados pelos modelos acústicos viscotérmicos motivou a investigação das condições de contorno aplicadas. Nesta análise, foi construído um modelo onde a radiação das ondas acústicas no meio externo ao tubo também foi avaliada. Nesta análise, foi aplicada a técnica PML para representar a dispersão das ondas acústicas no meio externo pelo método de Elementos Finitos. Esta técnica foi primeiramente validada com a comparação dos resultados obtidos pela formulação acústica clássica com a solução analítica para o tubo simples com o modelo acústico clássico.

Os resultados na análise da impedância de radiação mostraram que os efeitos viscotérmicos não alteram significativamente a impedância na interface entre o tubo e o meio externo.

A avaliação do efeito de posição dos sensores mostrou que os dados experimentais podem ser muito influenciados pela posição e dimensão dos sensores. Após o ajuste da posição dos sensores nos modelos NSFL e LRF, verificou-se que o modelo NSFL apresentou melhor convergência nos sistemas analisados. Com os resultados obtidos espera-se que o modelo NSFL possa ser usado com confiança na análise de sistemas com pequenas dimensões, incluindo os alto-falantes para aparelhos auditivos.

## 7.1 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho foi um estudo inicial de algumas ferramentas de análise para problemas acústicos viscotérmicos. Muitos aspectos ainda podem ser melhorados ou expandidos como, por exemplo:

- Estudo de alternativas para redução do custo computacional dos modelos NSFL como, por exemplo, desacoplar o problema térmico do sistema de equações e inclusão da combinação linear de autovetores para solução da pressão acústica;
- Desenvolvimento de formulações para análise de problemas com acoplamento fluido-estrutura, incluindo os efeitos viscotérmicos, como no caso da análise de alto-falantes para aparelhos auditivos;
- Desenvolvimento da técnica PML aplicada diretamente ao modelo NSFL para análises envolvendo propagação acústica em domínios sem restrições;
- Aplicação do modelo NSFL em problemas com fluido no estado

líquido, nos quais os efeitos de viscosidade são mais significativos do que no ar.



## REFERÊNCIAS

- [1] DILLON, H. *Hearing aids*. [S.l.]: Thieme, 2001.
- [2] BELTMAN, W. M. *Viscothermal wave propagation including acousto-elastic interaction*. Tese (Doutorado) — Universiteit Twente, Enschede (the Netherlands), 1998.
- [3] BOSSCHAART, C. *Optimizing the acoustic performance of a hearing aid receiver*. Dissertação (Mestrado) — University of Twente, Enschede (The Netherlands), 2006.
- [4] KAMPINGA, W. R. et al. The coupling of a hearing aid loudspeaker membrane to visco-thermal air layers. 2007.
- [5] BRUNEAU, M. et al. General formulation of the dispersion equation in bounded visco-thermal fluid, and application to some simple geometries. *Wave Motion*, v. 11, n. 5, p. 441 – 451, 1989.
- [6] BELTMAN, W. M. Viscothermal wave propagation including acousto-elastic interaction, part i: Theory. *Journal of Sound and Vibration*, v. 227, n. 3, p. 555 – 586, 1999.
- [7] BELTMAN, W. M. Viscothermal wave propagation including acousto-elastic interaction, part ii: Applications. *Journal of Sound and Vibration*, v. 227, n. 3, p. 587 – 609, 1999.
- [8] BELTMAN, W. M. et al. Implementation and experimental validation of a new viscothermal acoustic finite element for acousto-elastic problems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 216, n. 1, p. 159 – 185, 1998.
- [9] MALINEN, M. et al. A finite element method for the modeling of thermo-viscous effects in acoustics. In: *Proc. ECCOMAS*. [S.l.: s.n.], 2004.
- [10] NIJHOF, M.; WIJNANT, Y.; BOER, A. de. An acoustic finite element including viscothermal effects. In: *Fourteenth International Congress on Sound and Vibration, ICSV14*. [S.l.: s.n.], 2007.
- [11] JOLY, N. Finite element modelling of thermoviscous acoustics in closed cavities. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 123, n. 5, 2008.

- [12] CHENG, L.; WHITE, R.; GROSH, K. Three-dimensional viscous finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 197, n. 49-50, p. 4160–4172, 2008.
- [13] KAMPINGA, W. R.; WIJNANT, Y. H.; BOER, A. de. A finite element for viscothermal wave propagation. In: *Proceedings of ISMA 2008*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 4271–4278.
- [14] BELTMAN, W.; WIJNANT, Y.; NIJHOF, M. An overview of models for viscothermal wave propagation, including fluid structure interaction. *Journal of the Acoustical Society of America*, [New York: Acoustical Society of America], v. 123, n. 5, p. 3420, 2008.
- [15] KARRA, C.; TAHAR, M. B. An integral equation formulation for boundary element analysis of propagation in viscothermal fluids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 102, n. 3, p. 1311–1318, 1997.
- [16] KARRA, C.; TAHAR, M. B. Boundary element analysis of vibro-acoustic interaction between vibrating membrane and thin fluid layer. *Flow, Turbulence and Combustion*, Springer, v. 61, n. 1, p. 179–187, 1998.
- [17] RAYLEIGH, J. W. S. *The Theory of Sound*, (2nd ed.1896). [S.l.]: reprinted by Dover Publications, New York, 1945.
- [18] WESTON, D. E. The theory of the propagation of plane sound waves in tubes. *Proceedings of the Physical Society London.*, IOP Publishing, B.66, p. 695–709, 1953.
- [19] TIJDEMAN, H. On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. *Journal of Sound Vibration*, v. 39, p. 1–33, mar. 1975.
- [20] MOLDOVER, M.; MEHL, J.; GREENSPAN, M. Gas-filled spherical resonators: Theory and experiment. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 79, p. 253, 1986.
- [21] BRUNEAU, M. Acoustique des cavités: modèles et applications. *Le Journal de Physique IV*, v. 4, n. C5, p. 5–5, 1994.
- [22] ROBEY, D. Theory of the effect of a thin air film on the vibrations of a stretched circular membrane. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 26, p. 740, 1954.

- [23] BRUNEAU, M.; BRUNEAU, A.; HAMERY, P. An improved approach to modelling the behaviour of thin fluid films trapped between a vibrating membrane and a backing wall surrounded by a reservoir at the periphery. *Acta Acoustica*, p. 227–234, 1993.
- [24] HAMERY, P.; BRUNEAU, M.; BRUNEAU, A. M. Mouvement d'une couche de fluide dissipatif en espace clos sous l'action d'une source étendue. *Journal de Physique IV*, HAL - CCSD, p. 4:C5–213–C5–216, 1994.
- [25] WIJNANT, Y. et al. A semi-analytical solution for viscothermal wave propagation in narrow gaps with arbitrary boundary conditions. In: *Proceedings of The thirteenth International Congress on Sound and Vibration, Vienna, Austria*. [S.l.: s.n.], 2006.
- [26] KAMPINGA, R.; WIJNANT, Y.; BOER, A. Viscothermal wave propagation in a circular layer with a partially open and partially closed boundary. In: *Proceedings of the ISMA*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 4617–4626.
- [27] MöSER, M. Damping of structure born sound by the viscosity of a layer between two plates. *Acustica*, v. 46, p. 210–217, 1980.
- [28] FOX, M.; WHITTON, P. The damping of structural vibration by thin gas films. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 73, n. 2, p. 279–295, 1980.
- [29] TROCHIDIS, A. Vibration damping due to air or liquid layers. *Acustica*, v. 51, n. 4, p. 201–212, 1982.
- [30] ÖNSAY, T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system. *Journal of Sound and Vibration*, v. 163, n. 2, p. 231 – 259, 1993.
- [31] ÖNSAY, T. Dynamic interactions between the bending vibrations of a plate and a fluid layer attenuator. *Journal of Sound and Vibration*, v. 178, n. 3, p. 289 – 313, 1994.
- [32] BASTEN, T.; BELTMAN, W.; TIJDEMAN, H. Optimisation of viscothermal damping of double wall panels. In: NOISE CONTROL FOUNDATION. *INTERNOISE*. [S.l.], 1998. v. 1, p. 423–426.
- [33] BELTMAN, W.; BASTEN, T.; TIJDEMAN, H. Viscothermal damping in thin gas or fluid layers. American Society of Mechanical Engineers, 1999.

- [34] COMSOL, A. *COMSOL Multiphysics user's guide*. 3.5a. ed. [S.l.], 2009.
- [35] ZWIKKER, C.; KOSTEN, C. W. *Sound absorbing materials*. Amsterdam: Elsevier, 1949.
- [36] IBERALL, A. S. Attenuation of oscillatory pressures in instrument lines. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, v. 45, p. 85–108, 1950.
- [37] BELTMAN, W. et al. Air loads on a rigid plate oscillating normal to a fixed surface. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, v. 206, n. 2, p. 217–241, 1997.
- [38] PIERCE, A. *Acoustics: An introduction to its physical principles and applications*. New York: McGraw-Hill, 1981.
- [39] BLACKSTOCK, D. T. *Fundamentals of physical acoustics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [40] FOX, R.; MCDONALDS, A. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 5ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- [41] EERDEN, F. J. M. van der. *Noise reduction with coupled prismatic tubes*. Tese (Doutorado) — Universiteit Twente, Enschede (the Netherlands), 2000.
- [42] BASTEN, T. et al. On the acousto-elastic behaviour of double-wall panels with a viscothermal air layer. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 243, n. 4, p. 699–719, 2001.
- [43] COOK, R. et al. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. [S.l.]: Wiley, 2001.
- [44] MAREZE, P. H. *Aplicação de tubos ressonantes para atenuação sonora de cavidades e filtros acústicos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.
- [45] JOLY, N.; BRUNEAU, M.; BOSSART, R. Coupled equations for particle velocity and temperature variation as the fundamental formulation of linear acoustics in thermo-viscous fluids at rest. *Acta Acustica united with Acustica*, S. Hirzel Verlag, v. 92, n. 2, p. 202, 2006.



- [46] KAMPINGA, W. R.; WIJNANT, Y. H.; BOER, A. de. Performance of several viscothermal acoustic finite elements. *Acta acustica united with Acustica*, S. Hirzel Verlag, v. 96, n. 1, p. 115–124, 2010.
- [47] HARARI, I. A survey of finite element methods for time-harmonic acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 13-16, p. 1594 – 1607, 2006.
- [48] THOMPSON, L. A review of finite-element methods for time-harmonic acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 119, p. 1315, 2006.
- [49] GIVOLI, D. Computational absorbing boundaries. In: MARBURG, S.; NOLTE, B. (Ed.). *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2008. p. 145–166.
- [50] BERENGER, J. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 114, n. 2, p. 185–200, 1994.
- [51] HARARI, I.; SLAVUTIN, M.; TURKEL, E. Analytical and numerical studies of a finite element PML for the Helmholtz equation. *Journal of Computational Acoustics*, v. 8, n. 1, p. 121–138, 2000.
- [52] HARARI, I.; ALBOCHER, U. Studies of fe/pml for exterior problems of time-harmonic elastic waves. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 29-32, p. 3854 – 3879, 2006.
- [53] ZAMPOLLI, M. et al. A computationally efficient finite element model with perfectly matched layers applied to scattering from axially symmetric objects. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 122, n. 3, p. 1472–1485, 2007.
- [54] BERMÚDEZ, A. et al. Perfectly matched layers. In: MARBURG, S.; NOLTE, B. (Ed.). *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2008. p. 167–196.



## APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO FRACA PARA OS MODELOS NSFL

### A.1 FORMULAÇÃO IRREDUTÍVEL

#### A.1.1 Equação de Navier-Stokes

A formulação forte da equação de Navier-Stokes do modelo NSFL com formulação irredutível é dada por

$$i\omega\rho_0\mathbf{u} + \frac{P_0}{T_0}\nabla\tau - \left(\frac{P_0}{i\omega}\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) = \sum_{rs}\mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial x_s}\Phi_{rs}. \quad (\text{A.1})$$

A Eq. (A.1) é uma equação vetorial e pelo método de resíduos ponderados esta é multiplicada pela função ponderação  $\mathbf{u}^*$  e integrada ao longo do domínio  $\Omega$ . Para cada direção  $\mathbf{e}_r$  do sistema de coordenadas tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_r^* i\omega\rho_0 u_r + u_r^* \frac{P_0}{T_0} \frac{\partial\tau}{\partial x_r} - u_r^* \frac{P_0}{i\omega} \frac{\partial}{\partial x_r} (\nabla\cdot\mathbf{u}) - \\ - u_r^* \sum_s \left[ \frac{\partial}{\partial x_s} \Phi_{rs} \right] d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Aplicando a regra da cadeia no segundo, terceiro e quarto termos da equação acima, tem-se as seguintes expressões:

$$u_r^* \frac{P_0}{T_0} \frac{\partial\tau}{\partial x_r} = \frac{P_0}{T_0} \frac{\partial(u_r^* \tau)}{\partial x_r} - \frac{\partial u_r^*}{\partial x_r} \frac{P_0}{T_0} \tau, \quad (\text{A.3})$$

$$u_r^* \frac{P_0}{i\omega} \frac{\partial}{\partial x_r} (\nabla\cdot\mathbf{u}) = \frac{P_0}{i\omega} \frac{\partial[u_r^* (\nabla\cdot\mathbf{u})]}{\partial x_r} - \frac{\partial u_r^*}{\partial x_r} \frac{P_0}{i\omega} (\nabla\cdot\mathbf{u}), \quad (\text{A.4})$$

$$u_r^* \sum_s \left[ \frac{\partial}{\partial x_s} \Phi_{rs} \right] = \sum_s \left[ \frac{\partial(u_r^* \Phi_{rs})}{\partial x_s} \right] - \sum_s \left[ \frac{\partial u_r^*}{\partial x_s} \Phi_{rs} \right]. \quad (\text{A.5})$$

As Eqs. (A.3) a (A.5) são substituídas na Eq. (A.2), onde é aplicado o teorema da divergência nos termos

$$\int_{\Omega} \frac{P_0}{T_0} \frac{\partial(u_r^* \tau)}{\partial x_r} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{P_0}{T_0} (u_r^* \tau) n_r d\partial\Omega, \quad (\text{A.6})$$

$$\int_{\Omega} \frac{P_0}{i\omega} \frac{\partial[u_r^* (\nabla \cdot \mathbf{u})]}{\partial x_r} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{P_0}{i\omega} [u_r^* (\nabla \cdot \mathbf{u})] n_r d\partial\Omega, \quad (\text{A.7})$$

$$\int_{\Omega} \sum_s \left[ \frac{\partial(u_r^* \Phi_{rs})}{\partial x_s} \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega} \sum_s [(u_r^* \Phi_{rs}) n_s] d\partial\Omega. \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, com a substituição dos termos acima, a equação Eq. (A.1) na forma fraca é dada por

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_r^* i\omega \rho_0 u_r - \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x_r} \right) \left[ \frac{P_0}{T_0} \tau - \frac{P_0}{i\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \\ + \sum_s \left[ \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x_s} \right) \Phi_{rs} \right] d\Omega + \int_{\partial\Omega} u_r^* h_{Mr} d\partial\Omega = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

sendo

$$h_{Mr} = \frac{P_0}{T_0} \tau n_r - \frac{P_0}{i\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) n_r - \sum_s [\Phi_{rs} n_s]. \quad (\text{A.10})$$

### A.1.2 Equação da energia

A formulação forte da equação da energia do modelo NSFL com a formulação irreduzível é dada por

$$i\omega \rho_0 C_v \tau + P_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \kappa \Delta \tau. \quad (\text{A.11})$$

Aplicando-se o método de resíduos ponderados na Eq. (A.11), esta é multiplicada pela função ponderação  $\tau^*$  e integrada ao longo do domínio  $\Omega$  resultando em

$$\int_{\Omega} \tau^* i\omega \rho_0 C_v \tau + \tau^* P_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \tau^* \kappa \Delta \tau d\Omega. \quad (\text{A.12})$$

Utilizando a regra da cadeia, o terceiro termo da equação acima

é dado por

$$\tau^* \kappa \Delta \tau = \kappa \nabla \cdot (\tau^* \nabla \tau) - \kappa (\nabla \tau^* \cdot \nabla \tau). \quad (\text{A.13})$$

Substituindo a Eq. (A.13) na Eq. (A.12), tem-se

$$\int_{\Omega} \tau^* i\omega \rho_0 C_v \tau + \tau^* P_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \kappa \nabla \cdot (\tau^* \nabla \tau) + \kappa (\nabla \tau^* \cdot \nabla \tau) d\Omega. \quad (\text{A.14})$$

Aplicando o teorema da divergência, o terceiro termo da Eq. (A.14) é dado por

$$\int_{\Omega} \kappa \nabla \cdot (\tau^* \nabla \tau) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \kappa \mathbf{n} \cdot (\tau^* \nabla \tau) d\partial\Omega. \quad (\text{A.15})$$

Substituindo a Eq. (A.15) na Eq. (A.14), tem-se a formulação fraca da Eq. (A.11), dada por

$$\int_{\Omega} \tau^* i\omega \rho_0 C_v \tau + \tau^* P_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \kappa \nabla \tau^* \cdot \nabla \tau d\Omega - \int_{\partial\Omega} \tau^* h_T d\partial\Omega = 0, \quad (\text{A.16})$$

sendo

$$h_T = \kappa \mathbf{n} \cdot \nabla \tau. \quad (\text{A.17})$$

## A.2 FORMULAÇÃO MISTA

### A.2.1 Equação de Navier-Stokes

A formulação forte da equação de Navier-Stokes do modelo NSFL com formulação mista é dada por

$$i\omega \rho_0 \mathbf{u} + \nabla p = \sum_{rs} \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial x_s} \Phi_{rs}. \quad (\text{A.18})$$

A Eq. (A.18) é uma equação vetorial e pelo método de resíduos ponderados esta é multiplicada pela função ponderação  $\mathbf{u}^*$  e integrada ao longo do domínio  $\Omega$ . Para cada direção  $\mathbf{e}_r$  do sistema de coordenadas tem-se

$$\int_{\Omega} u_r^* i\omega \rho_0 u_r + u_r^* \frac{\partial p}{\partial x_r} - u_r^* \sum_s \left[ \frac{\partial}{\partial x_s} \Phi_{rs} \right] d\Omega = 0. \quad (\text{A.19})$$

Aplicando a regra da cadeia no segundo e terceiro termos da

equação acima, tem-se as seguintes relações:

$$u_r^* \frac{\partial p}{\partial x_r} = \frac{\partial(u_r^* p)}{\partial x_r} - \frac{\partial u_r^*}{\partial x_r} p, \quad (\text{A.20})$$

$$u_r^* \sum_s \left[ \frac{\partial}{\partial x_s} \Phi_{rs} \right] = \sum_s \left[ \frac{\partial(u_r^* \Phi_{rs})}{\partial x_s} \right] - \sum_s \left[ \frac{\partial u_r^*}{\partial x_s} \Phi_{rs} \right]. \quad (\text{A.21})$$

As Eqs. (A.20) e (A.21) são substituídas na Eq. (A.19), onde aplica-se o teorema da divergência nos seguintes termos:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(u_r^* p)}{\partial x_r} d\Omega = \int_{\partial\Omega} (u_r^* p) n_r d\partial\Omega, \quad (\text{A.22})$$

$$\int_{\Omega} \sum_s \left[ \frac{\partial(u_r^* \Phi_{rs})}{\partial x_s} \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega} \sum_s [(u_r^* \Phi_{rs}) n_s] d\partial\Omega. \quad (\text{A.23})$$

Finalmente, com a substituição dos termos acima, a equação Eq. (A.18) na forma fraca é dada por

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_r^* i\omega \rho_0 u_r - \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x_r} \right) p + \sum_s \left[ \left( \frac{\partial u_r^*}{\partial x_s} \right) \Phi_{rs} \right] d\Omega + \\ + \int_{\partial\Omega} u_r^* h_{Mr} d\partial\Omega = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

sendo

$$h_{Mr} = p n_r - \sum_s [\Phi_{rs} n_s]. \quad (\text{A.25})$$

### A.2.2 Equação da energia

A formulação forte da equação de Navier-Stokes do modelo NSFL com formulação mista é dada por

$$i\omega \rho_0 C_p \tau - i\omega p = \kappa \Delta \tau. \quad (\text{A.26})$$

Aplicando-se o método de resíduos ponderados na Eq. (A.26), esta é multiplicada pela função ponderação  $\tau^*$  e integrada ao longo do domínio  $\Omega$  resultando em

$$\int_{\Omega} \tau^* i\omega \rho_0 C_p \tau - \tau^* i\omega p - \tau^* \kappa \Delta \tau d\Omega. \quad (\text{A.27})$$

Substituindo a Eq. (A.13) na Eq. (A.27), tem-se

$$\int_{\Omega} \tau^* i\omega \rho_0 C_p \tau - \tau^* i\omega p - \kappa \nabla \cdot (\tau^* \nabla \tau) + \kappa (\nabla \tau^* \cdot \nabla \tau) d\Omega. \quad (\text{A.28})$$

Finalmente, substituindo a Eq. (A.15) na Eq. (A.28), tem-se a formulação fraca da Eq. (A.26), dada por

$$\int_{\Omega} \tau^* i\omega \rho_0 C_p \tau - \tau^* i\omega p + \kappa \nabla \tau^* \cdot \nabla \tau d\Omega - \int_{\partial\Omega} \tau^* h_T d\partial\Omega = 0, \quad (\text{A.29})$$

sendo  $h_T$  obtido pela Eq. (A.17).

### A.2.3 Equação da continuidade

A formulação forte da equação da continuidade do modelo NSFL (formulação mista) é dada por

$$i\omega \left( \frac{p}{P_0} - \frac{\tau}{T_0} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (\text{A.30})$$

A formulação fraca da equação acima é obtida pela multiplicação da mesma pela função ponderação  $p^*$  e integração ao longo do domínio  $\Omega$ , dada por

$$\int_{\Omega} p^* i\omega \frac{p}{P_0} - p^* i\omega \frac{\tau}{T_0} + p^* \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0. \quad (\text{A.31})$$